



Gobierno
del Estado de México



Tecnológico de Estudios Superiores del Oriente del Estado de México
Organismo Público Descentralizado del Gobierno del Estado de México

Cuadernillo de Apuntes de Matemáticas III

M. en C. Luis Ignacio
Sandoval Paéz

Índice

	Página
Unidad I vectores	3
1.1 Definición de un vector en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ (Interpretación geométrica), y su generalización en $\mathbb{R}^n$.	3
1.2 Operaciones con vectores y sus propiedades.	5
1.3 Producto escalar y vectorial.	6
1.4 Productos triples (escalar y vectorial)	7
1.5 Aplicaciones físicas y geométricas de los productos escalares y vectoriales.	8
Unidad II Curvas planas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares.	9
2.1 Curvas planas y ecuaciones paramétricas.	9
2.2 Ecuaciones paramétricas de algunas curvas y su representación gráfica.	9
2.3 Derivada de una función dada paramétricamente.	13
2.4 Longitud de arco en forma paramétrica.	15
2.5 Coordenadas polares.	26
2.6 Gráficas de ecuaciones polares.	28
Unidad III Funciones vectorial de una variable real	31
3.1 Definición de función vectorial de una variable real, dominio y graficación.	31
3.2 Límites y continuidad.	32
3.3 Derivación de funciones vectoriales y sus propiedades.	36
3.4 Integración de funciones vectoriales.	38
3.5 Longitud de arco.	38
3.6 Vector tangente, normal y binorma.	40
3.7 Curvatura.	42
3.8 Aplicaciones.	46
Unidad IV Funciones de varias variables	46
4.1 Definición de una función de dos variables.	46
4.2 Gráfica de una función de dos variables.	47
4.3 Curvas y superficies de nivel.	50
4.4 Límites y continuidad.	55
4.5 Definición de derivadas parciales de funciones de dos variables, así como su interpretación geométrica.	64
4.6 Derivadas parciales de orden superior	67
4.7 Incrementos, diferenciales y regla de la cadena.	72
4.8 Derivación parcial implícita.	77
4.9 Coordenadas cilíndricas y esféricas.	80
4.10 Derivada direccional, gradiente divergencia y rotacional.	90
4.11 Aplicaciones geométricas y físicas de los operadores vectoriales.	103
Unidad V Integrales múltiples.	112
5.1 Integrales iteradas.	112
5.2 Definición de integral doble: Áreas y Volúmenes.	113
Referencias	117

Unidad I vectores

1.1 Definición de un vector en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ (Interpretación geométrica), y su generalización en $\mathbb{R}^n$.

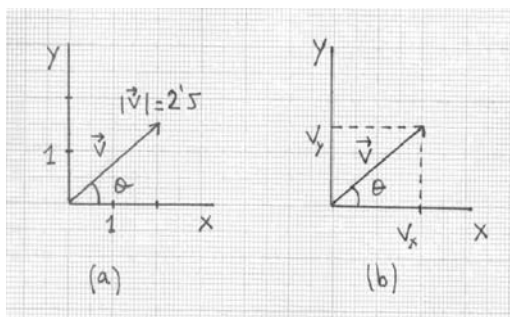
Magnitudes físicas

Existen magnitudes físicas que quedan perfectamente definidas mediante un número expresado en sus unidades correspondientes. Ejemplos de este tipo de magnitud son: la masa m , volumen V , temperatura T , longitud de onda λ , potencial eléctrico V , etc. A estas magnitudes se les denomina magnitudes escalares. Sin embargo, para describir adecuadamente ciertos sistemas físicos, deberemos hacer uso de otro tipo de magnitudes para las que, además de un escalar (número), hace falta indicar la dirección y el sentido. Se llaman magnitudes vectoriales y en los textos se representan mediante una letra con una flecha encima, o bien en negrita. Por ejemplo, la velocidad $\vec{v}$ (o $\mathbf{v}$), la fuerza $\mathbf{F}$, campo magnético $\mathbf{B}$, etc. Vamos a ocuparnos de definir estas últimas y recordar las operaciones básicas que pueden llevarse a cabo con ellas.

Definición de vector

Un vector es un ente matemático que representa una magnitud vectorial. Geométricamente es un segmento de recta orientado, es decir, una flecha. En tres dimensiones, se necesitan tres parámetros para definirlos; en dos dimensiones este número se reduce a dos. Estos parámetros pueden ser representados de distintas maneras, pero siempre tiene que haber un modo de pasar de una representación a otra, como veremos a continuación. En primer lugar es necesario definir un sistema de ejes perpendiculares entre sí: XYZ en 3 dimensiones ó XY en 2 dimensiones (ver figura).

Si $\mathbf{v}$ representa una magnitud vectorial, llamamos módulo de $\mathbf{v}$ ($|\vec{v}|$ o bien simplemente v , a la longitud de la flecha que la representa. El módulo debe ser



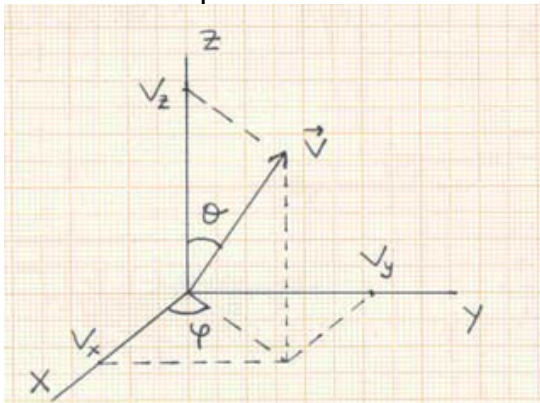
siempre una cantidad positiva. Para completar la definición del vector es preciso indicar la dirección de la flecha. Suele darse indicando el ángulo que la misma forma con uno de los ejes, θ . Cuando un vector se define con estas dos cantidades, se dice que está expresado en coordenadas polares.

Otra manera de representar la misma magnitud vectorial en el mismo sistema de ejes consiste en dar las proyecciones del vector a lo largo de cada uno de los ejes, v_x y v_y . Cuando el vector se define así, se dice que está expresado en coordenadas cartesianas y se suele representar como (v_x, v_y) .

¿Cómo se transforman unas coordenadas en otras? A la vista de la figura, y utilizando relaciones trigonométricas sencillas se llega a:

(a)	(b)	(b)	(a)
v, θ	v_x, v_y	v_x, v_y	v, θ
polares	cartesianas	cartesianas	polares
	$v_x = v \cos \theta$		$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
	$v_y = v \sin \theta$		$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$

En tres dimensiones, como ya se ha comentado, se necesitan tres parámetros para definir el vector. Las coordenadas cartesianas son ahora las proyecciones del vector sobre cada uno de los ejes XYZ y de forma análoga al caso anterior se suele representar el vector como (v_x, v_y, v_z) . Las coordenadas polares reciben el nombre de coordenadas esféricas y están constituidas por el módulo del vector (v), el ángulo que forma con el eje Z (θ) y el ángulo que la proyección del vector sobre el plano XY forma con el eje X (φ) (ver figura).



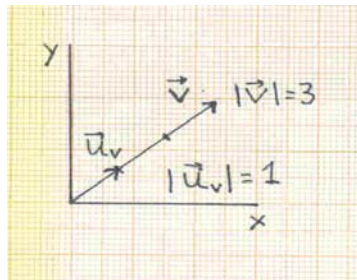
El modo de pasar de unas coordenadas a otras es el siguiente:

esféricas	cartesianas	cartesianas	esféricas
v, θ, φ	v_x, v_y, v_z	v_x, v_y, v_z	v, θ, φ
	$v_z = v \cos \theta$		$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$
	$v_x = v \sin \theta \cos \varphi$		

$$v_y = v \sin \theta \sin \varphi$$

Para que dos vectores sean iguales han de tener las mismas componentes, independientemente del sistema de coordenadas en que se expresen.

Vector unitario. Vectores constituyentes: Un vector es unitario si tiene módulo 1. Para calcular un vector unitario a partir de uno dado, se divide éste por su módulo. El resultado es un vector $\mathbf{u}_v$ de módulo 1 y con la misma



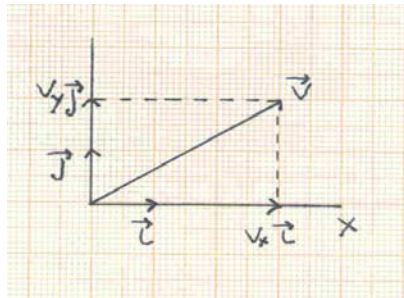
dirección y sentido que el vector original.

Pueden definirse vectores unitarios en las direcciones de los ejes y que apunten en el sentido positivo de los mismos. Estos vectores se denominan $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ para los ejes X, Y, Z respectivamente.

Cualquier vector $\mathbf{v}$ se puede expresar en términos de sus proyecciones a lo largo de los ejes y de estos vectores unitarios. Por ejemplo, en tres dimensiones:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

Donde v_x, v_y, v_z son dichas proyecciones (o componentes cartesianas). Los



vectores $v_x \vec{i}, v_y \vec{j}, v_z \vec{k}$ se denominan vectores constituyentes del vector $\vec{v}$. En dos dimensiones:

1.2 Operaciones con vectores y sus propiedades.

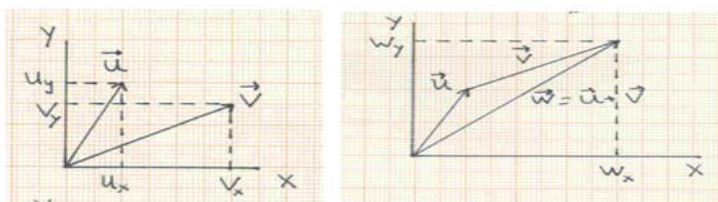
Suma de vectores

Sean dos vectores $\mathbf{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$ y $\mathbf{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$

Se define el vector suma $\mathbf{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}$ como:

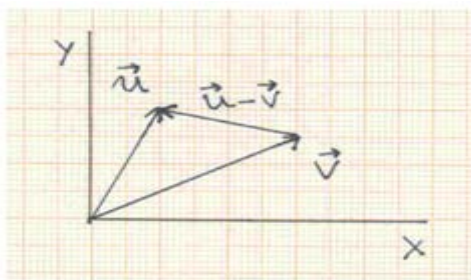
$$\mathbf{w} = (u_x + v_x) \vec{i} + (u_y + v_y) \vec{j} + (u_z + v_z) \vec{k}$$

En dos dimensiones podemos calcular $\mathbf{w}$ gráficamente de la siguiente manera:



Del dibujo se puede deducir que el módulo del vector suma no es igual a la suma de los módulos de los vectores. La suma de vectores tiene la propiedad conmutativa $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

Para calcular el vector resta $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, se calcula cada componente restando a cada componente de $\mathbf{u}$ la componente correspondiente del vector $\mathbf{v}$ (ver figura):



$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_x - v_x) \mathbf{i} + (u_y - v_y) \mathbf{j} + (u_z - v_z) \mathbf{k}$$

1.3 Producto escalar y vectorial.

Producto de un escalar por un vector

Sea $\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$ y c un escalar. El producto $\mathbf{r} = c \mathbf{u}$ se calcula

$$\mathbf{r} = cu_x \mathbf{i} + cu_y \mathbf{j} + cu_z \mathbf{k}$$

El resultado de esta operación es otro vector cuyo módulo es el producto del módulo de $\mathbf{u}$ por el escalar c . La dirección de $\mathbf{r}$ es la misma que la de $\mathbf{u}$, y el sentido es el mismo si c es positivo y opuesto si c es negativo.

Producto escalar de dos vectores

Sean dos vectores $\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$ que forman un ángulo θ .

Se define el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta$

El resultado de esta operación no es un vector, es un escalar. El producto escalar cumple la propiedad conmutativa.

De esta definición se deduce que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es siempre nulo y que el de dos vectores paralelos es el producto de sus módulos.

Para los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ resultan las siguientes relaciones:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$$

En el caso de que los vectores estén expresados en componentes y utilizando las relaciones anteriores se obtiene que el producto escalar se calcula:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Producto vectorial de dos vectores

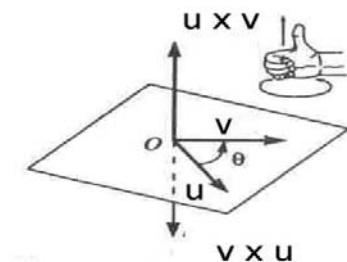
Sean dos vectores $\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$ se define el producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

El resultado de esta operación es un vector. El producto vectorial de dos vectores no cumple la propiedad conmutativa, cumpliéndose que:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

Este vector tiene módulo $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$, donde θ es el ángulo que forman los dos vectores. La dirección y el sentido de este vector vienen determinados por la regla de la mano derecha, siendo la dirección siempre perpendicular al plano formado por los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.



Para los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ resultan las siguientes relaciones

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

1.4 Productos triples (escalar y vectorial)

Sean A , B y C vectores de R^3 , llamamos triple producto escalar al número real $A \cdot (B \times C)$. Al producto $A \times (B \times C)$ se llama triple producto vectorial.

Propiedades: Sean A , B y C vectores de R^3 , entonces

$$1. A \cdot (B \times C) = A \times B \cdot C$$

$$2. A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$$

1.5 Aplicaciones físicas y geométricas de los productos escalares y vectoriales.

Cosenos directores:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{u}_a$$

$$\mathbf{u}_a = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \beta \cdot \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot \mathbf{k}$$

$|\mathbf{a}|$ = modulo del vector

$\mathbf{u}_a$ = vector unitario de $\mathbf{a}$

Las proyecciones de $\mathbf{a}$ sobre los ejes x , y , z , respectivamente, equivalen a:

$$\mathbf{a}_x = \mathbf{a} \cdot \cos \alpha_x$$

$$\mathbf{a}_y = \mathbf{a} \cdot \cos \beta_y$$

$$\mathbf{a}_z = \mathbf{a} \cdot \cos \gamma_z$$

Si aplicamos la formula (Basada en el teorema de Pitágoras):

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2 + \mathbf{a}_z^2$$

Entonces:

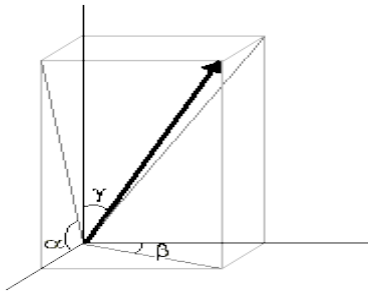
$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^2 \cdot \cos^2 \alpha_x + \mathbf{a}^2 \cdot \cos^2 \beta_y + \mathbf{a}^2 \cdot \cos^2 \gamma_z$$

De donde se deduce que:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

Se debe hacer notar que la proyección de $\mathbf{a}$ en una dirección cualquiera (por ejemplo: $\mathbf{a}_x$) es un escalar, mientras que su componente en la misma dirección (por ejemplo: $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{i}$) es un vector.

Para un vector genérico $\mathbf{a}$, los cosenos de los ángulos α , β y γ , que forma con los semiejes x , y , z , respectivamente, se denominan **cosenos directores** de $\mathbf{a}$.



Curvas planas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares.

2.1 Curvas planas y ecuaciones paramétricas.

En ocasiones se establece una relación entre dos variables “x” y “y” no directamente, sino a través de una tercera variable que se llama parámetro, en la forma:

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

de modo que para cada valor real que tome el parámetro t se obtiene un par (x,y) .

Definición: Una curva plana es el conjunto de puntos (x, y) determinados por las ecuaciones paramétricas cuando el parámetro t varía en un cierto intervalo I y las funciones f y g están ambas definidas en el intervalo I .

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

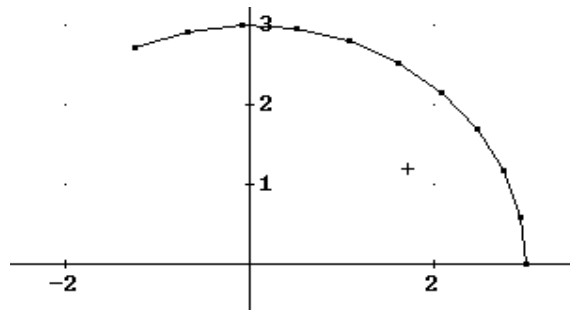
2.2 Ecuaciones paramétricas de algunas curvas y su representación gráfica.

Se establece entre “x” y “y” una relación de forma paramétrica. Si los pares (x,y) obtenidos para todos los valores de t en un cierto intervalo, se representan como puntos en un plano, usualmente se obtiene un trazo continuo.

Ejemplo: $x = 3 \cos(t)$ $y = 3 \sin(t)$

t	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2
x	3	2.940	2.763	2.476	2.090	1.620	1.087	0.510	-0.088	-0.682	-1.248
y	0	0.596	1.168	1.693	2.152	2.524	2.796	2.956	2.998	2.921	2.727

A continuación se muestra la gráfica obtenida cuando se trazan en el plano estos puntos y se unen mediante segmentos de recta:



Es bastante evidente, que si se diera a t todos los valores reales en el intervalo $[0, 2]$ se obtendría un arco de circunferencia de radio 3 con centro en el origen.

A veces es posible eliminar el parámetro en las ecuaciones paramétricas y entonces se obtiene una ecuación en x y y que permite identificar la curva. Es importante aclarar que en muchas ocasiones esto no es posible.

Ejemplo: Eliminar el parámetro t en las ecuaciones del ejemplo anterior.

Solución:

$$\begin{aligned}x &= 3 \cos t \\y &= 3 \sin t\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de cada ecuación:

$$\begin{aligned}x^2 &= 9 \cos^2 t \\y^2 &= 9 \sin^2 t\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro:

$$x^2 + y^2 = 9(\cos^2 t + \sin^2 t)$$

Teniendo en cuenta la identidad pitagórica:

$$x^2 + y^2 = 9$$

Esto significa que, todos los puntos de la curva plana definida paramétricamente se encuentran en una circunferencia de radio 3 con centro en $(0, 0)$. Nótese que, dependiendo de los valores que tome t , las ecuaciones pueden definir a toda la circunferencia, o una porción arbitraria de la misma.

Ejercicios

En cada una de las curvas planas que siguen, elimine el parámetro, identifique la curva y trace la curva plana correspondiente.

1.
$$\begin{aligned}x &= t + 2 \\y &= 3t - 1\end{aligned} \quad 1 < t < 3$$

2.
$$\begin{aligned}x &= t - 1 \\y &= \frac{2}{t - 1}\end{aligned} \quad t \neq 1$$

3.
$$\begin{aligned}x &= 3 + 4 \sin \theta \\y &= 2 + 2 \cos \theta\end{aligned} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Solución:

$$1. \quad \begin{aligned} x &= t + 2 \\ y &= 3t - 1 \end{aligned}$$

Despejando t en la primera ecuación: $t = x - 2$

Sustituyendo en la segunda: $y = 3(x - 2) - 1$

Simplificando: $y = 3x - 7$

Que es la ecuación de una recta con pendiente 3 y ordenada -7 en el eje y .

La curva plana definida no es toda esta recta. Como $1 < t < 3$ entonces, sumando 2 en cada miembro de la desigualdad:

$$3 < t + 2 < 5 \quad \text{es decir,} \quad 3 < x < 5$$

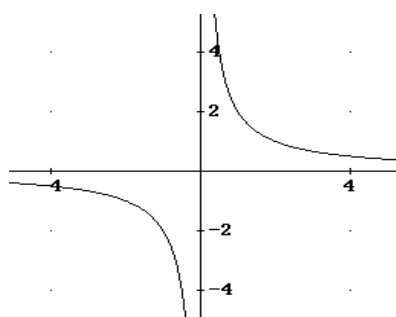
Para $x = 3$ se obtiene $y = 2$. Para $x = 5$ se obtiene $y = 8$. La curva plana definida es un segmento de recta entre los puntos $(3, 2)$ y $(5, 8)$ que no incluye los extremos.

$$2. \quad \begin{aligned} x &= t - 1 \\ y &= \frac{2}{t - 1} \quad t \neq 1 \end{aligned}$$

En este caso, basta con sustituir $t - 1$ por x en la segunda ecuación:

$$y = \frac{2}{x}$$

Que es una hipérbola equilátera con los ejes coordenados como asíntotas. Se trata de la hipérbola completa pues los valores de $t > 1$ generan la rama positiva y los valores de $t < 1$ la rama negativa. La gráfica es:



$$3. \quad \begin{aligned} x &= 3 + 4 \sin \theta \\ y &= 2 + 2 \cos \theta \end{aligned} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Despejando en la primera ecuación $\sin \theta$ y en la segunda $\cos \theta$, se obtiene:

$$\frac{x-3}{4} = \sin \theta$$

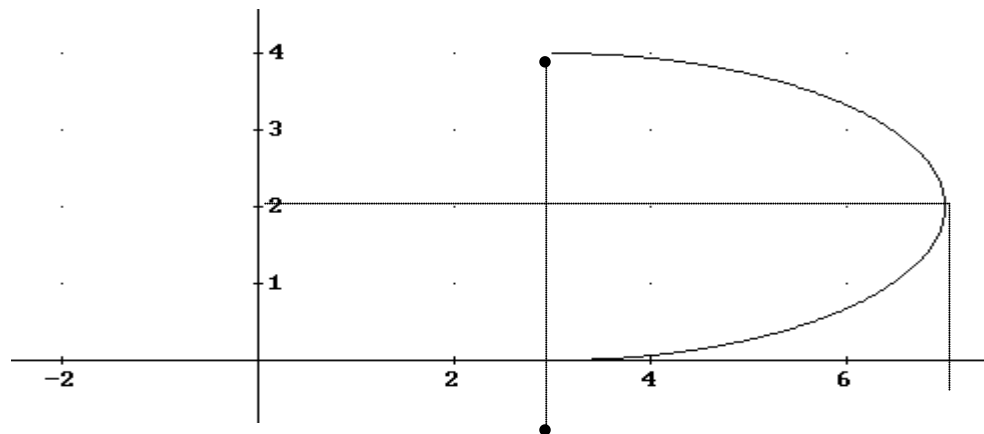
$$\frac{y-2}{2} = \cos \theta$$

Elevando al cuadrado, sumando y teniendo en cuenta la identidad pitagórica:

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

Que es una elipse con centro en (3, 2) y semieje mayor $a = 4$ paralelo al eje x y semieje menor $b = 2$ paralelo al eje y . La curva plana no es la elipse completa. Nótese que:

Cuando θ varia entre 0 y $\pi/2$, el punto (x, y) cambia de (3, 4) hasta (7, 2). Cuando θ varía entre $\pi/2$ y π el punto (x, y) se mueve de (7, 2) hasta (3, 0). De aquí se ve que la curva original es solamente la mitad derecha de la elipse. En la figura que sigue se muestra la curva.



Algunas curvas notables en forma paramétrica

Elipses desplazadas: $x = h + a \cos t$
 $y = k + b \sin t$

Centro en (h, k) semiejes a (paralelo al eje x) y b (paralelo al eje y)

La cicloide: es la trayectoria que describe un punto fijo de una circunferencia cuando esta rueda (sin deslizarse) sobre una línea recta. Si la circunferencia tiene radio a y rota a lo largo del eje x con el punto fijo comenzando en el origen de coordenadas, las ecuaciones de la curva son:

$$x = a\theta - a \sin \theta$$

$$y = a - a \cos \theta$$

El parámetro θ en este caso representa geoméricamente el ángulo (en radianes) que rota la circunferencia en su desplazamiento.

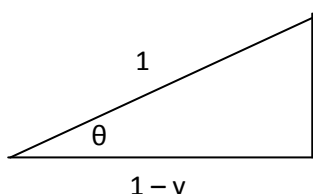
Ejercicio

Halle la ecuación de una cicloide que se genera por la rotación de un círculo de radio 1 que rota a lo largo del eje x . Trace 3 arcos de la curva. Halle su ecuación no paramétrica.

Solución: Para $a = 1$, las ecuaciones quedan: $x = \theta - \sin \theta$
 $y = 1 - \cos \theta$

Discutir, a partir del significado geométrico, como debe ser la gráfica de esta cicloide.

Para sustituir en la primera ecuación, conviene hallar primero $\sin \theta$. Como $\cos \theta = 1 - y$, se construye un triángulo rectángulo con hipotenusa 1 y cateto adyacente $1 - y$:



El otro cateto se halla por Pitágoras y se obtiene: $\sin \theta = \sqrt{1 - (1 - y)^2} = \sqrt{2y - y^2}$

Ahora, sustituyendo en la primera ecuación: $x = \cos^{-1}(1 - y) - \sqrt{2y - y^2}$ la cual representa a la mitad del primer ciclo de la cicloide.

Destacar la complejidad de la ecuación no paramétrica en comparación con la representación paramétrica.

Preguntas:

1. ¿Cómo se establece una relación entre dos variables “ x ” y “ y ” de forma paramétrica?
2. ¿Es posible o aconsejable en todos los casos eliminar el parámetro para obtener una ecuación que relacione directamente a “ x ” y “ y ”?
3. Diga las ecuaciones paramétricas de una circunferencia con centro en (1, 1) y tangente a ambos ejes coordenados.
4. ¿Qué es una cicloide?

2.3 Derivada de una función dada paramétricamente.

El siguiente teorema nos proporciona las condiciones necesarias para obtener la derivada de una función dada en forma paramétrica.

Teorema

Sean f y g funciones derivables en un intervalo $]t_1, t_2[$. Supongamos que f tiene una inversa derivable en ese intervalo. Entonces en cada punto donde $f'(t) \neq 0$, las ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$ implican que existe una función derivable F tal que $y = f(x)$, y además $D_x y = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{D_t y}{D_t x}$

Ejemplos:

$$D_x y \text{ si } x = e^t, y = 1 + t^2 \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

1. Determine

Solución:

$$D_x y = \frac{D_t y}{D_t x}$$

Por el teorema anterior se tiene que

Luego:

$$D_t y = 2t, D_t x = e^t \text{ (} e^t \neq 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{)} \quad D_x y = \frac{2t}{e^t}$$

por lo que

$$x = \frac{t^2}{t^2 + 1}, y = \frac{t}{t^2 - 1}$$

2. Determinar los puntos de la curva con ecuaciones en los que es cero la pendiente de la recta tangente a la curva.

Solución:

Recuerde que la pendiente de la recta tangente está dada por $D_x y$.

$$D_t x = \frac{-2t}{(t^2 - 1)^2}, y D_t y = -\frac{1 + t^2}{(t^2 - 1)^2} \quad D_x y = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

Como entonces

La pendiente de la recta tangente es cero cuando $D_x y = 0$, en este caso cuando $t^2 + 1 = 0$; pero esta igualdad no se cumple para ningún valor real de t . Luego, no existe ningún punto de la curva dada donde la pendiente de la recta tangente sea cero.

3. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva con ecuaciones $x = Bt$, $y = Ct - dt^2$ cuando $t = 0$

Solución:

La ecuación de la recta tangente está dada por $y = mx + b$, donde $m = D_x y$.

$$D_x y = \frac{D_t y}{D_t x} = \frac{C - 2dt}{B}$$

Se tiene que

Cuando $t = 0$ entonces $D_x y = \frac{C}{B}$, por lo que $y = \frac{C}{B}x + b$ (*)

Cuando $t = 0$ se obtiene $x = 0$, $y = 0$, y al sustituir en (*) se obtiene: $b = 0$.

$$y = \frac{C}{B}x$$

Luego, la ecuación de la recta tangente es:

Derivadas de orden superior para una función dada en forma paramétrica

Si x y y están dadas en forma paramétrica entonces $D_x^2 y$ puede expresarse como sigue:

$$D_x^2 y = D_x(D_x y) = \frac{D_t(D_x y)}{D_t x}$$

Ejemplo:

Si $x = 2t^3 + \operatorname{sen} t$, $y = t^2 - \cos t$ entonces $D_x y = \frac{2t + \operatorname{sen} t}{6t^2 + \cos t}$ y

$$D_x^2 y = \frac{D_t(D_x y)}{D_t x} = \frac{D_t\left(\frac{2t + \operatorname{sen} t}{6t^2 + \cos t}\right)}{D_t(2t^3 + \operatorname{sen} t)}$$

$$= \frac{(6t^2 + 2)\cos t + 1 - 12t^2 - 10 \operatorname{sen} t}{(6t^2 + \cos t)^2(6t^2 + \cos t)}$$

En general, para obtener la enésima derivada, cuando las ecuaciones están dadas en forma paramétrica, se aplica la siguiente igualdad:

$$D_x^n y = \frac{D_t(D_x^{n-1} y)}{D_t x}$$

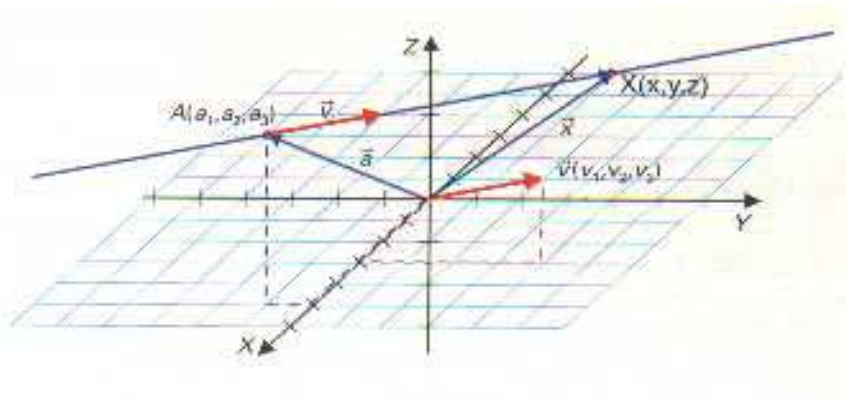
Ecuaciones de una recta en el espacio.

Sea $A(a_1, a_2, a_3)$ un punto cualquiera del espacio tridimensional y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ un vector del mismo. La ecuación de la recta que pasa por el punto A y tiene la dirección del vector $\vec{v}$, puede adoptar las siguientes formas:

Vectorial: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$

Donde $\vec{x}$ y $\vec{a}$ son los vectores de posición (con origen en el centro de coordenadas) de un punto genérico de la recta y del punto A respectivamente, y t es un parámetro al que dando valores cualesquiera vamos obteniendo diversos de los infinitos puntos de la recta.

Gráficamente la situación es la representada en la figura siguiente:



2.4 Longitud de arco en forma paramétrica

Adoptan la forma:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 + tv_1 \\ y &= a_2 + tv_2 \\ z &= a_3 + tv_3 \end{aligned} \right\}$$

Continúa:

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

Explícitas:

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + Cz &= D \\ A'x + B'y + C'z &= D' \end{aligned} \right\}$$

que representan la recta como la intersección de dos planos en el espacio.

Problemas típicos sobre las ecuaciones de la recta.

Recta que pasa por dos puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$:

Tomamos A como punto base de la recta y el vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ como vector director con lo que ya podemos escribir las paramétricas y derivar de ellas las demás formas.

Determinar si tres puntos A , B y C están alineados:

Escribimos la ecuación de la recta que pasa por dos de ellos y comprobamos si el tercero satisface dicha ecuación.

Recta que corta a otras dos r y s , perpendicularmente:

Ponemos r y s en paramétricas.

Obtenemos de cada una un punto genérico (A y B respectivamente) y el vector director respectivo $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Hallamos las componentes del vector $\vec{AB}$.

Como este vector ha de ser ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$

, los productos escalares siguientes serán nulos:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0$$

y del sistema de ecuaciones formado podemos despejar los dos parámetros.

Sustituyendo los valores hallados para los parámetros en las expresiones genéricas de A y B, obtenemos estos puntos.

- Calculamos la recta que pasa por A y B como se ha descrito en el apartado b)

Ecuaciones del plano en el espacio.

Para determinar un plano en el espacio necesitamos conocer:

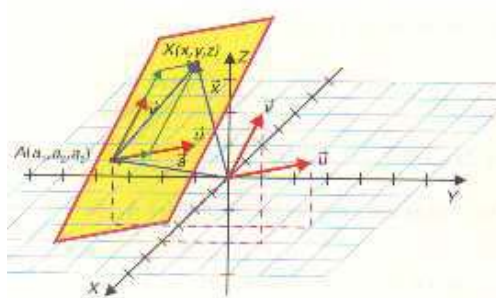
1. Un punto del mismo A y dos vectores directores linealmente independientes $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
2. Tres puntos A, B y C no alineados.
3. Un punto A y un vector normal al plano.

Las diferentes formas de ecuaciones del plano en el espacio afín tridimensional son:

Vectorial:

$$\vec{x} = \vec{a} + p\vec{u} + q\vec{v}$$

En la siguiente figura se observa el significado de cada uno de los elementos y p, q son dos parámetros dando valores a los cuales obtenemos sucesivos puntos del plano:



Paramétricas:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 + pu_1 + qv_1 \\ y &= a_2 + pu_2 + qv_2 \\ z &= a_3 + pu_3 + qv_3 \end{aligned} \right\}$$

Implícita o general:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

donde el vector $\vec{n}(A, B, C)$ es perpendicular (normal) al plano.

Segmentaría o canónica:

Si el plano corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ y $C(0, 0, c)$, la ecuación adopta la forma:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Problemas típicos de ecuaciones del plano.

Recta que pasa por un punto y es perpendicular a un plano.

El vector normal al plano es el vector director de la recta.

Ecuación del plano determinado por tres puntos A, B y C:

Basta tomar como base uno de los puntos, por ejemplo el A y los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ como directores. O bien resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (A, B y C) formado al sustituir las coordenadas de los tres puntos en la ecuación general del plano buscado, después de haber obtenido uno de los coeficientes como unidad.

Ecuación de un plano paralelo a otro por un punto dado:

Al ser los dos planos (el dado y el buscado) paralelos, ambos tendrán el mismo vector normal, por lo que bastará escribir iguales los coeficientes A, B y C de la

ecuación implícita y determinar D sustituyendo las coordenadas del punto dado.

Plano que contiene a una recta r y a un punto A exterior a la recta:

Hallamos un punto B de r y su vector director $\vec{u}$. Entonces el punto A lo tomamos como base y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v} = A\vec{B}$ como directores del plano.

Haz de planos secantes a una recta:

Dada la recta:

$$\left. \begin{array}{l} Ax + By + Cz - D = 0 \\ A'x + B'y + C'z - D' = 0 \end{array} \right\}$$

Los infinitos planos que pasan por ella (haz de planos de arista r) son:

$$Ax + By + Cz - D + \lambda(A'x + B'y + C'z - D') = 0$$

Donde para cada valor del parámetro obtenemos un plano del haz.

Posiciones relativas de dos rectas.

Sean las rectas:

$$\begin{aligned} r &\equiv \begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases} \\ s &\equiv \begin{cases} Ex + Fy + Gz = H \\ E'x + F'y + G'z = H' \end{cases} \end{aligned}$$

Al tratar de encontrar los posibles puntos de intersección de ambas hay que resolver el sistema de 4 ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \\ Ex + Fy + Gz = H \\ E'x + F'y + G'z = H' \end{array} \right\}$$

Y según el Teorema de Rouché, teniendo en cuenta que $2 \leq r(A) \leq 3$ y que $2 \leq r(B) \leq 4$, siendo A y B las matrices de los coeficientes y ampliada respectivamente, pueden ocurrir los siguientes casos:

$r(A) = 3 \neq r(B) = 4$. Sistema incompatible. Las rectas se cruzan en el espacio.

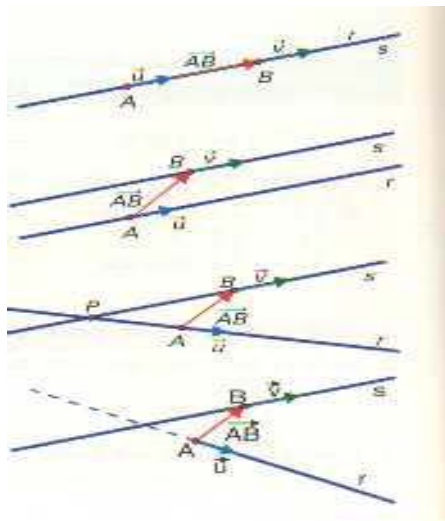
$r(A) = r(B) = 3$. Sistema compatible y determinado. Las rectas se cortan en un único punto.

$r(A) = 2 \neq r(B) = 3$. Sistema incompatible. Las rectas son paralelas.

$$r(A) = r(B) = 2$$

. Sistema compatible e indeterminado con un grado de libertad. Las rectas son coincidentes.

Ver figura:



Posiciones relativas de una recta y un plano.

Sean la recta y el plano:

$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$$

$$\pi \equiv Ex + Fy + Gz = H$$

Al tratar de resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + Cz &= D \\ A'x + B'y + C'z &= D' \\ Ex + Fy + Gz &= H \end{aligned} \right\}$$

Pueden darse los siguientes casos:

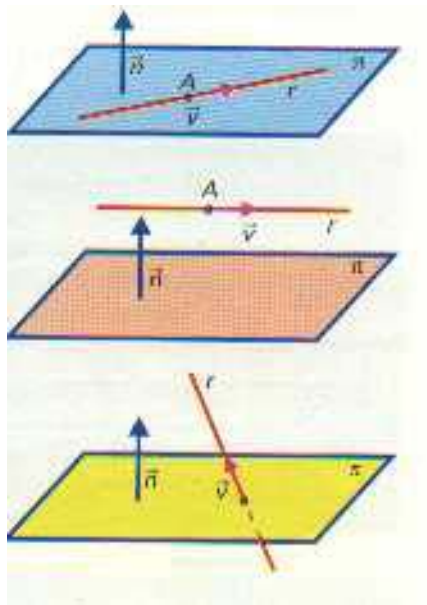
$r(A) = r(B) = 3$. Sistema compatible y determinado. La recta y el plano se cortan en un único punto.

Sistema incompatible. La recta y el plano son paralelos.

$$r(A) = r(B) = 2$$

Sistema compatible e indeterminado con un grado de libertad. La recta está contenida en el plano.

Ver figura:



Posiciones relativas de dos planos.

Sean los planos:

$$\pi \equiv Ax + By + Cz = D$$

$$\pi' \equiv A'x + B'y + C'z = D'$$

Al tratar de resolver el sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{array} \right\}$$

Pueden darse los siguientes casos:

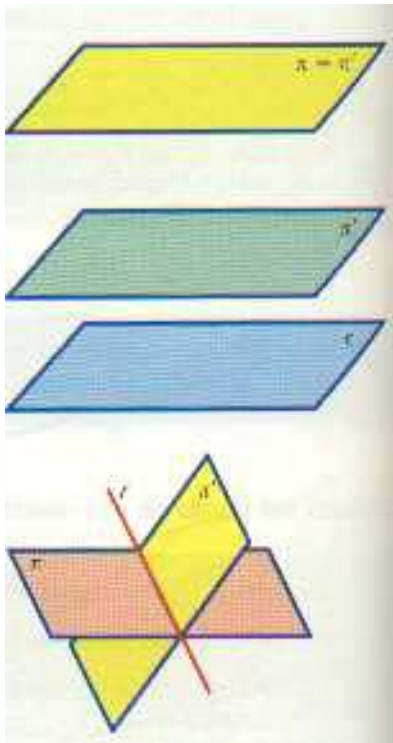
$r(A) = r(B) = 2$. Sistema compatible e indeterminado. Los planos se cortan en una recta.

$r(A) = 1 \neq r(B) = 2$. Sistema incompatible. Los planos son paralelos.

$$r(A) = r(B) = 1$$

Sistema compatible e indeterminado con dos grados de libertad. Los planos son coincidentes.

Ver figura:

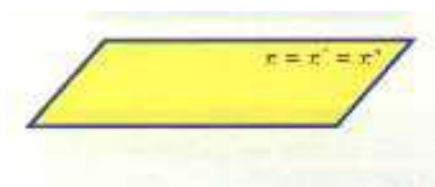


Posiciones relativas de tres planos.

Del estudio del sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que forman las ecuaciones implícitas de los tres planos, podemos obtener los siguientes casos:

$$r(A) = r(B) = 1$$

Sistema compatible e indeterminado con 2 grados de libertad. Los 3 planos coinciden:



$$r(A) = 1 \neq r(B) = 2$$

Sistema incompatible. Los planos son, o dos coincidentes y el otro paralelo, o los tres paralelos:



$$r(A) = r(B) = 2$$

Sistema compatible e indeterminado con un grado de libertad. Los planos se cortan en una recta los tres o bien, dos son coincidentes y el otro se corta con ellos en una recta:



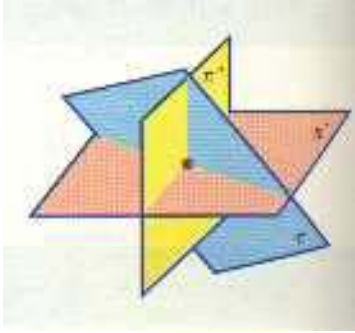
$$r(A) = 2 \neq r(B) = 3$$

Sistema incompatible. Los planos pueden ser dos paralelos y otra secante a ambos o los tres formando una superficie prismática:



$$r(A) = r(B) = 3$$

Sistema compatible y determinado. Los tres planos se cortan en un único punto:



Distancia entre dos puntos.

La distancia entre los puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ es:

$$d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Distancia de un punto a una recta.

Si A es un punto de la recta y $\vec{v}$ su vector director y además P es el punto exterior, la distancia de P a r es:

$$d(P, r) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Siendo el numerador el módulo del producto vectorial.

Distancia de un punto a un plano.

Sean:

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

Y $P(p_1, p_2, p_3)$

La distancia entre ambos es:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Distancia entre dos rectas. Si las rectas son secantes o coincidentes, su distancia es nula. Si son paralelas o se cruzan puede ocurrir:

Paralelas: basta calcular un punto de una de ellas y la distancia entre él y la otra.

Se cruzan: Sean A y B dos puntos de r y s respectivamente y $\vec{u}, \vec{v}$

sus vectores directores, se tiene que:

$$d(r, s) = \frac{|\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Siendo el numerador el módulo del producto mixto y el denominador el módulo del producto vectorial.

Distancia de una recta a un plano.

Es la distancia entre un punto de la recta y el plano (sólo en el caso de que ambos sean paralelos), pues en los demás casos la distancia es nula.

Distancia entre dos planos.

Si no son paralelos la distancia es nula. Si lo son, la distancia se calcula obteniendo un punto del primero y averiguando su distancia hasta el segundo.

Ángulo de dos rectas.

Si las rectas son secantes o se cruzan, el ángulo será el mismo que el formado por sus vectores directores y habrá de cumplir:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Ángulo de recta y plano.

Si la recta es secante al plano el ángulo que forman es el complementario del que forman el vector normal al plano y el director de la recta, esto es:

$$\text{sen } \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|}$$

Ángulo de dos planos.

Si son secantes es ángulo es el mismo que formen sus vectores normales, es decir:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|}$$

Problemas típicos en el espacio métrico.

1. Área del paralelogramo ABCD

Será:

$$A = |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

2. Área del triángulo ABC:

$$A = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$$

3. Volumen del paralelepípedo ABCDEFGH:

$$V = |\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}|$$

4. Volumen del tetraedro ABCD:

$$V = \frac{|\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}|}{6}$$

Resolver los siguientes reactivos

1) Eliminar el parámetro y escribir la ecuación rectangular correspondiente

$$x = 3\cos \theta, y = 3\sin \theta$$

a) $x^2 + y^2 = 9$ b) $x^2 + y^2 = 13$ c) $x^2 + y^2 = 15$ d) $x^2 + y^2 = 19$

2) Eliminar el parámetro y escribir la ecuación rectangular correspondiente

$$x = 4\sin 2\theta, y = 2\cos 2\theta$$

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ b) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{6} = 1$ c) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{8} = 1$ d) $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{10} = 1$

3) Eliminar el parámetro y escribir la ecuación rectangular correspondiente

$$x = 4 + 2\cos \theta, y = -1 + \sin \theta$$

a) $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{1} = 1$ b) $\frac{(x-4)^2}{6} + \frac{(y+1)^2}{3} = 1$ c) $\frac{(x-4)^2}{8} + \frac{(y+1)^2}{6} = 1$

4) Eliminar el parámetro y escribir la ecuación rectangular correspondiente

$$x = \sec \theta, y = \tan \theta$$

a) $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ b) $\frac{(x-4)^2}{6} + \frac{(y+1)^2}{18} = 1$ c) $\frac{(x-4)^2}{8} + \frac{(y+1)^2}{20} = 1$

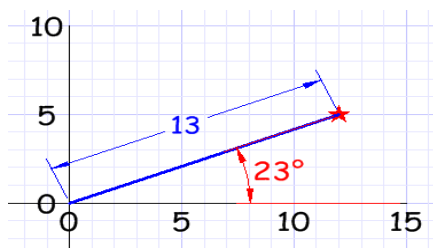
5) Eliminar el parámetro y escribir la ecuación rectangular correspondiente

$x = \cos^3 \theta$, $y = \sin^3 \theta$

a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ b) $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1$ c) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{15} = 1$ d) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{18} = 1$

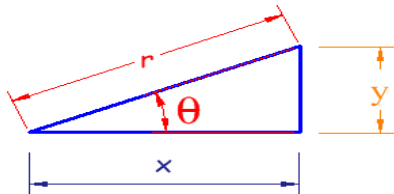
2.5 Coordenadas polares.

Con coordenadas polares señalas un punto diciendo la **distancia** y el **ángulo** que se forma:



Convertir

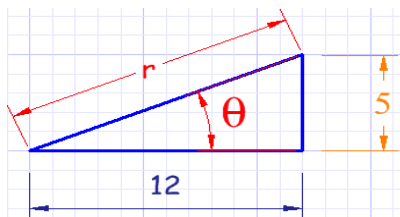
Para convertir de un sistema a otro, se resuelve el triángulo:



De cartesianas a polares

Si tienes un punto en coordenadas cartesianas (x,y) y lo quieres en coordenadas polares (r,θ), necesitas resolver un triángulo del que conoces dos lados.

Ejemplo: ¿qué es (12,5) en coordenadas polares?



Usamos el teorema de Pitágoras para calcular el lado largo (la hipotenusa):

$$r^2 = 12^2 + 5^2$$

$$r = \sqrt{12^2 + 5^2}$$

$$r = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

Usa la función tangente para calcular el ángulo:

$$\tan(\theta) = 5 / 12$$

$$\theta = \text{atan}(5 / 12) = 22.6^\circ$$

Así que las fórmulas para convertir coordenadas cartesianas (x,y) a polares (r,θ) son:

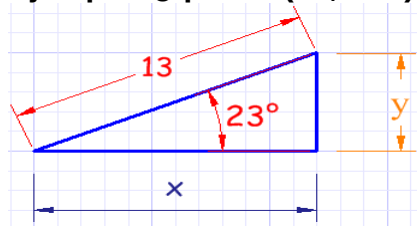
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \text{atan}(y / x)$$

De polares a cartesianas

Si tienes un punto en coordenadas polares (r, θ) y lo quieres en coordenadas cartesianas (x,y) necesitas resolver un triángulo del que conoces el lado largo y un ángulo:

Ejemplo: ¿qué es (13, 23 °) en coordenadas cartesianas?



Usamos la función coseno para x: $\cos(23^\circ) = x / 13$

Cambiamos de orden y resolvemos: $x = 13 \times \cos(23^\circ) = 13 \times 0.921 = 11.98$

Usamos la función seno para y: $\sin(23^\circ) = y / 13$

Cambiamos de orden y resolvemos: $y = 13 \times \sin(23^\circ) = 13 \times 0.391 = 5.08$

Así que las fórmulas para convertir coordenadas polares (r,θ) a cartesianas (x,y) son:

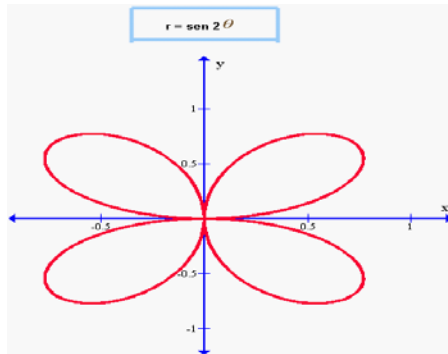
$$x = r \times \cos(\theta)$$

$$y = r \times \sin(\theta)$$

2.6 Gráficas de ecuaciones polares.

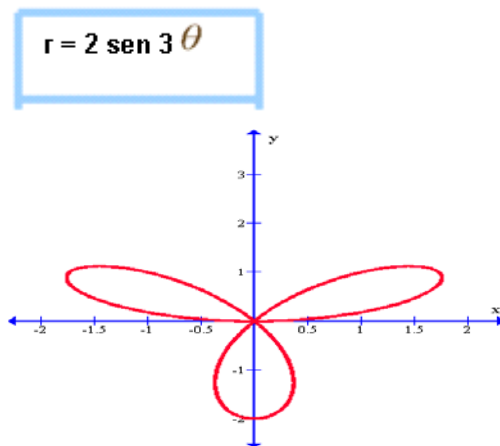
ROSA DE CUATRO HOJAS/PÉTALOS

Este tipo de gráfico se conoce como **Rosa de cuatro pétalos**. Es fácil ver cómo se forma una figura parecida a una rosa con cuatro pétalos. La función para este gráfico es:



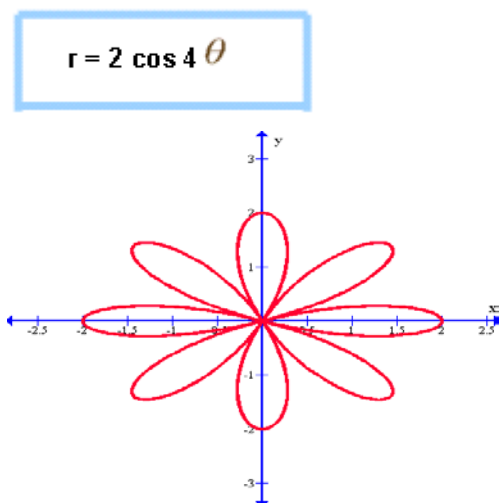
ROSA DE TRES HOJAS/PÉTALOS

Presentamos ahora el gráfico llamado **Rosa de tres pétalos**. Analógicamente al gráfico de la rosa de cuatro pétalos, este gráfico es parecido pero tiene sólo tres hojas o pétalos en su forma gráfica. Un ejemplo es el siguiente:



ROSA DE OCHO HOJAS/PÉTALOS

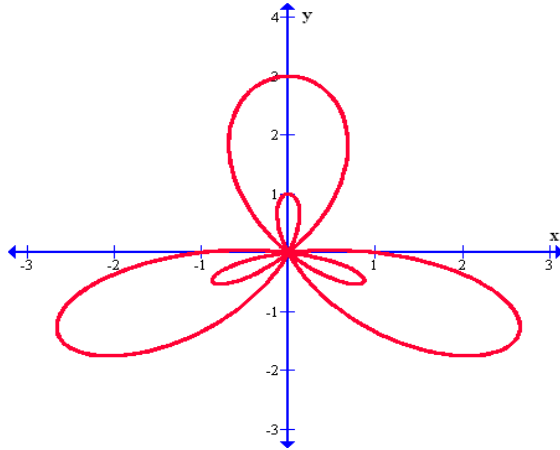
El siguiente gráfico es como los dos anteriores, pero ahora con ocho hojas o pétalos, tal como lo vemos en la siguiente función graficada:



UNA ROSA DENTRO DE OTRA

Un caso interesante y especial que se puede dar es el que se muestra en la gráfica que vemos a continuación, donde se aprecia una **rosa de tres pétalos** precisamente dentro de otra **rosa de tres pétalos u hojas**. Veamos:

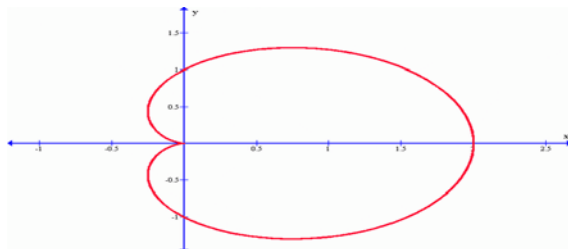
$$r = 1 - 2 \operatorname{sen} 3\theta$$



CARDIOIDES

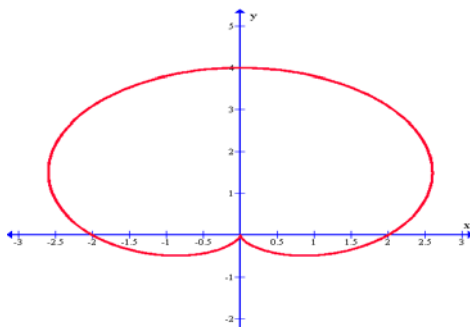
A continuación se presenta el tipo de gráfico que se denomina **cardioide**. Para este ejemplo se presenta una cardioide simétrica con respecto al eje poplar y que apunta hacia la derecha. Podemos observar que se distingue una figura como de un corazón, razón por la cual se llama este gráfico cardioide. La función que lo ha generado es:

$$r = -1 + \cos \theta$$



Habiendo visto el primer gráfico de una cardioide, se presenta otro gráfico de este tipo pero ahora apunta hacia arriba, tal como lo vemos a en el gráfico de la siguiente función:

$$r = 2(1 + \operatorname{sen} \theta)$$

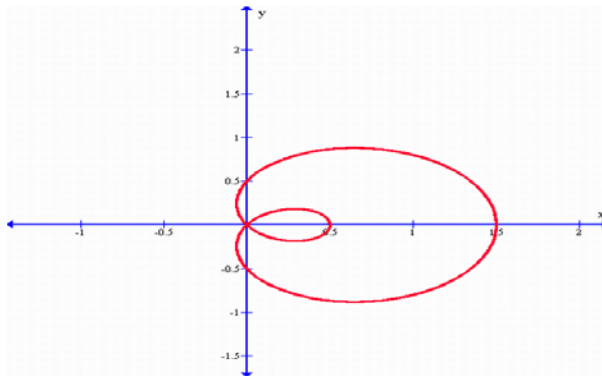


LIMACONES O CARACOLES

$$r = 1 + b \cos \theta$$

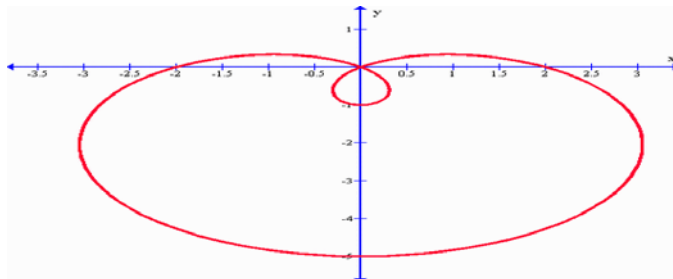
Ahora veamos un ejemplo concreto de un gráfico de este tipo, donde se muestra un **caracol** que apunta hacia la derecha y que tiene un **lazo interior**. La función para este gráfico es la siguiente:

$$r = (1/2) + \cos \theta$$



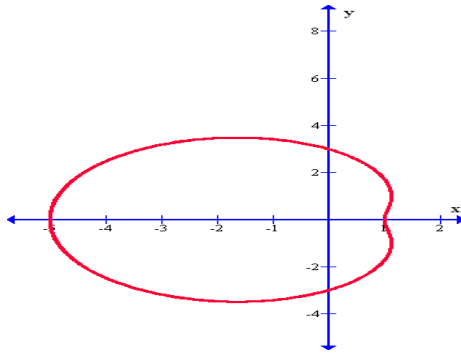
Veamos otro gráfico de una función que tiene como resultado **un caracol con un lazo interior** pero que a diferencia del gráfico anterior, este apunta hacia abajo. Veamos:

$$r = 2 - 3 \cos \theta$$



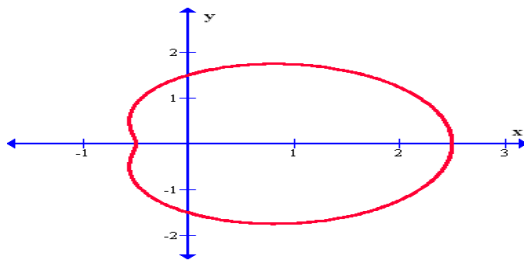
Continuando con la gráfica de caracoles o limaques, hay otro tipo que es el **caracol con hendidura** o **caracol con concavidad**. Como podremos observar, este no tiene lazo, y está dirigido hacia la izquierda. Veamos a continuación el gráfico que resulta, el cual apunta hacia la izquierda:

$$r = 3 - 2 \cos \theta$$



Ahora se muestra un gráfico igual al anterior con la diferencia que ahora está dirigido hacia la derecha, de modo que tenemos un **limaçon** o **caracol con hendidura o concavidad** que está dirigido hacia la derecha:

$$r = \frac{3}{2} + \cos \theta$$



Funciones vectorial de una variable real.

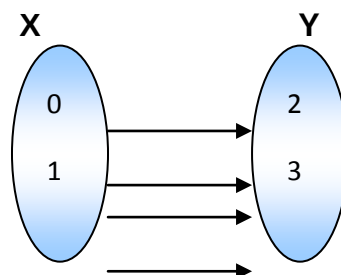
3.1 Definición de función vectorial de una variable real, dominio y graficación.

Utilizando coordenadas cartesianas, una función vectorial $\mathbf{A}(t)$ es un vector dependiente de la variable escalar t y definido en el espacio x, y, z , o sea:

$$\mathbf{A}(t) = A_x(t)\mathbf{i} + A_y(t)\mathbf{j} + A_z(t)\mathbf{k}$$

Por lo tanto todos los conceptos y definiciones de las funciones ordinarias son aplicables a las funciones vectoriales haciéndolo a cada una de las componentes del vector.

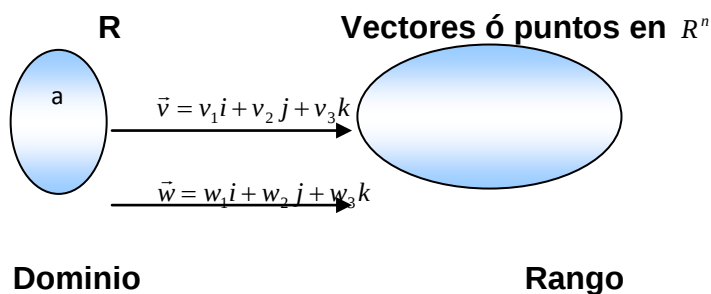
Funciones vectoriales de una variable real



Dominio

Rango

$$f : x \rightarrow y$$



Función vectorial:

Una función vectorial de una variable real es la correspondencia de un conjunto de números reales R llamado dominio con un conjunto de vectores o puntos R^n llamado rango o contradominio tal que a cada elemento de R le corresponde uno y sólo un elemento de R^n .

Si t es un número real

$$f(t) = g(t)i + h(t)j + I(t)k \Rightarrow \text{Función vectorial}$$

Ejemplo

$$f(t) = 2t^2 i + \sqrt{t} j + \frac{1}{2} k \quad f(4) = 32i + 2j + \frac{1}{2} k$$

3.2 Límites y continuidad.

Definición

Si $f(t) = g(t)i + h(t)j + I(t)k$ define una función vectorial el límite de $f(t)$ cuando " t " se aproxima a un número " a " es un vector dado por

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \lim_{t \rightarrow a} g(t)i + \lim_{t \rightarrow a} h(t)j + \lim_{t \rightarrow a} I(t)k$$

Teorema

Si " f " y " d " son dos funciones vectoriales y $\underline{\lim f}$ y $\underline{\lim d}$ existen entonces:

- 1) $\lim_{t \rightarrow a} (f \pm d) = \lim_{t \rightarrow a} f \pm \lim_{t \rightarrow a} d$
- 2) $\lim_{t \rightarrow a} (f \cdot d) = \lim_{t \rightarrow a} f \cdot \lim_{t \rightarrow a} d$
- 3) $\lim_{t \rightarrow a} (f \times d) = \lim_{t \rightarrow a} f \times \lim_{t \rightarrow a} d \Rightarrow \text{sólo para } \mathbb{R}^3$

Ejemplo 1

Dado $f(t) = \ln ti + \sqrt{1+t^2} j + \frac{2-t}{4-t^2} k$ calcular él $\lim_{t \rightarrow 2} f(t)$

Solución

$\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = \ln 2i + \sqrt{5}j + \frac{2-t}{(2-t)(2+t)}k$ En k el denominador es una diferencia de cuadrados acomodamos el denominador antes de sustituir.

Por lo tanto $\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = \ln 2i + \sqrt{5}j + \frac{1}{(2+t)}k$ ahora sustituiremos en k y obtendremos el

resultado del $\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = \ln 2i + \sqrt{5}j + \frac{1}{4}k$

Ejemplo 2

Dada la función $f(t) = (\sqrt{t-2} - \sqrt{t})i + \frac{2t}{4+t^2}j$ calcular él $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$

Solución

Primero resolveremos la “ i ”

Nota: Recuerde que él $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

$$(\sqrt{t-2} - \sqrt{t}) \cdot \left(\frac{\sqrt{t-2} + \sqrt{t}}{\sqrt{t-2} + \sqrt{t}} \right) = \frac{t-2-t}{\sqrt{t-2} + \sqrt{t}} = 0i$$

Ahora resolveremos lo de j

Nota: Cuando se tiende a ∞ se divide entre la variable de mayor exponente numerador y denominador aplicando luego el teorema.

$$\frac{2t}{4-t^2}j$$

$$\frac{\frac{2t}{t^2}}{\frac{4-t^2}{t^2}} = \frac{\frac{2}{t}}{\frac{4}{t^2}-1} = \frac{0}{-1} = 0j \text{ por lo tanto } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0i + 0j$$

Ejemplo 3

Dada $f(t) = \cos t i + 2e^t j + \sin t k$ calcular $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$

Solución

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \cos(0)i + 2e^0 j + \sin(0)k$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = i + 2j$$

Definición

Una función vectorial $f(t)$ es continua en un número $t = a$ de su dominio sí y solo sí se cumplen las tres siguientes condiciones:

- 1) $f(0)$ existe
- 2) $\lim_{t \rightarrow a} f(t)$ existe
- 3) $f(a) = \lim_{t \rightarrow a} f(t)$

Ejemplo

Determine si $f(t) = (t^3 - 3)i + \frac{t^2 - 4}{-t + 2}j$ es continua o discontinua en $t = 2$

Solución

- 1) $f(2) = 5i + \frac{0}{0}j$ no existe
- 2) $\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2} (t^3 - 3)i + \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t-2)(t+2)(-1)}{-t+2}j$
 $= 5i + \lim_{t \rightarrow 2} -(t+2)$
 $= 5i - 4j$

- 3) El número 1 es diferente que el 2 por lo tanto es discontinua

Una curva trayectoria ó simple curva denotada por "c" es el rango de una función vectorial continua con un intervalo como dominio.

Ejemplo 1

Trazar la grafica de la curva c denotada por la función:

$$f(t) = \cos t i + \sin t j \quad \text{SÍ } t \in [0, \pi]$$

t	$x = \cos t$	$y = \sin t$	(x,y)
0	1	0	(1,0)
45°	0.7071	0.7071	(0.7071,0.7071)
90°	0	1	(0,1)
135°	-0.7071	0.7071	(-0.7071,0.7071)
180°	-1	0	(-1,0)

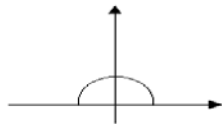


Figura Grafica de $f(t) = \cos t i + \sin t j$

Ejemplo 2

Trace la curva c descrita por la ecuación $f(t) = \sin t i + \frac{1}{2} t j + \cos t k$ SÍ $t \in [0, 4\pi]$

t	$x = \sin t$	$y = \frac{1}{2} t$	$z = \cos t$	(x,y,z)
0	0	0	1	A(0,0,1)
$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	1	0.78	0	B(1,0.78,0)
$180^\circ = \pi$	0	1.57	-1	C(0,1.57,-1)
$270^\circ = \frac{3}{2}\pi$	-1	2.35	0	D(-1,2.35,0)
$315^\circ = \frac{7}{4}\pi$	-0.70	2.74	0.70	(-0.7,2.7,0.7)

$360^0 = 2\pi$	0	3.1416	1	F(0,3.14,1)
$405^0 = \frac{9}{4}\pi$	0.70	3.53	0.70	G(0.7,3.5,0.7)
$450^0 = \frac{5}{2}\pi$	1	3.92	0	H(1,3.92,0)
$540^0 = 3\pi$	0	4.71	-1	I(0,4.71,-1)
$630^0 = \frac{7}{2}\pi$	-1	5.49	0	J(-1,5.49,0)
$720^0 = 4\pi$	0	6.28	1	K(0,6.28,1)

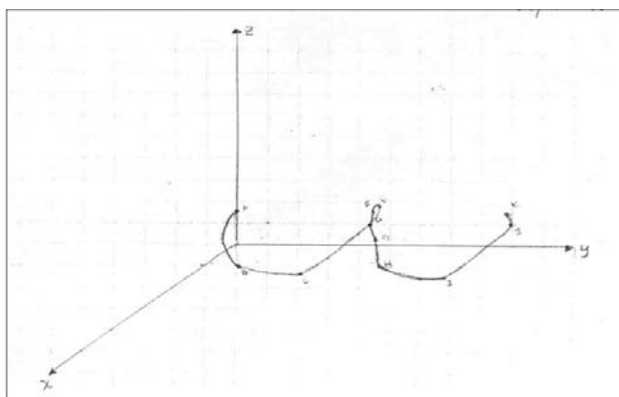


Figura Grafica de $f(t) = \text{sent}i + \frac{1}{2}tj + \text{cost}k$

Ejercicio

Trazar la grafica de la curva c denotada por la función:

$$f(t) = 2 \cos ti - 3 \text{sent}j \quad \text{Si } t \in [0, 2\pi]$$

3.3 Derivación de funciones vectoriales y sus propiedades.

Teorema

Si “f” es una función vectorial definida por $f(t) = g(t)i + h(t)j + I(t)k$, entonces la derivada de “f” en función de “t” está dada por:

$$f'(t) = g'(t)i + h'(t)j + I'(t)k \quad \text{y las derivadas de orden superior por:}$$

$$f''(t) = g''(t)i + h''(t)j + I''(t)k$$

$$f'''(t) = g'''(t)i + h'''(t)j + I'''(t)k, \text{ etc.}$$

Ejemplo 1

Hallar la segunda derivada de la función $f(t) = \ln t i - 3t^2 j + \arctan tk$

Solución

$$f'(t) = \frac{1}{t}i - 6tj + \frac{1}{1+t^2}k$$

$$f''(t) = -\frac{1}{t^2}i - 6j - \frac{2t}{(1+t^2)^2}k$$

Ejemplo 2

Hallar la primera derivada de la función $f(t) = t \cos 5t i + t \sin 5t j$

Solución

$$y = uv$$

$$y' = uv' + vu' \Rightarrow \text{Resolveremos el problema utilizando } uv$$

$$f(t) = t \cos 5t i + t \sin 5t j$$

$$f'(t) = [(t(-\sin 5t))(5) + \cos 5t(1)]i + [t(\cos 5t)(5) + \sin 5t(1)]j$$

$$f'(t) = [-5t \sin 5t + \cos 5t]i + [5t \cos 5t + \sin 5t]j$$

Ejemplo 3

Hallar la primera derivada de la función $f(t) = e^{-t}i + e^{-t} \sin 2t j + e^{-t} \cos 2t k$

$$f'(t) = e^{-t}(-1)i + [e^{-t} \cos 2t(2) + \sin 2t e^{-t}(-1)]j + [e^{-t}(-2 \sin 2t) + \cos 2t(-e^{-t})]k$$

$$f'(t) = -e^{-t}i + [2e^{-t} \cos 2t - e^{-t} \sin 2t]j + [-2e^{-t} \sin 2t - e^{-t} \cos 2t]k$$

Ejercicios

Hallar la primera derivada de las siguientes funciones:

[1] $r(t) = e^{2-t}i + 8t^5 j - 12\sqrt{t}k$

Solución

$$r'(t) = -e^{2-t}i + 40t^4 j - \frac{6}{\sqrt{t}}k$$

[2] $r(t) = (8 - \cos t)i - (4 + \sin t)j + \ln tk$

Solución

$$r'(t) = \sin t i - \cos t j + \frac{1}{t}k$$

[3] $r(t) = \frac{1}{t}i - \sqrt{t}j - e^{\sqrt{t}}k$

Solución

$$r'(t) = -\frac{1}{t^2}i - \frac{1}{2\sqrt{t}}j - \frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}k$$

[4] $f(t) = \ln(3+t^2)i - 5\sqrt{t}j + \arcsentk$

Solución

$$f'(t) = \frac{3+t^2}{2t}i - \frac{5}{2\sqrt{t}}j + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}k$$

$$[5] \quad f(t) = 8^{-3t}i + e^{-5t}\sin 5tj + e^{-5t}\tan 5tk$$

Solución

$$f'(t) = (-3)8^{-3t}i + [5e^{-5t}\cos 5t + \sin 5t(-5e^{-5t})]j + [5e^{-5t}\sec^2 5t + \tan 5t(-5e^{-5t})]k$$

$$[6] \quad f(t) = 2\ln ti - \ln \cos tj - \ln(t+1)k$$

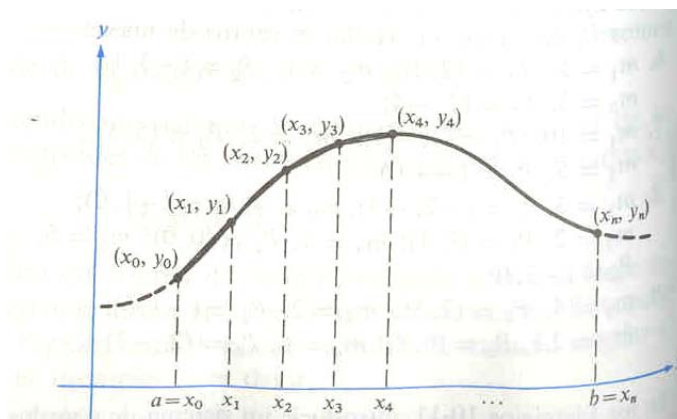
Solución

$$f'(t) = \frac{2}{t}i + \cot tj - (t+1)k$$

3.4 Integración de funciones vectoriales.

3.5 Longitud de arco

Sea c la curva dada por la función $f(t) = g(t)i + h(t)j$ continua en $[a, b]$



L_p = longitud de la poligonal

$$L_p = |P_i P_{i-1}|$$

$$L_p = \sqrt{(t_{i-1} - t_i)^2 + [f(t_{i-1}) - f(t_i)]^2}$$

$|\Delta|$ = Módulo ó norma de partición

$$L = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n |P_i P_{i-1}|$$

$$L = \int_a^b |f'(t)| dt$$

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt$$

Ejemplo 1

Hallar la longitud de arco de la curva c descrita por la ecuación $f(t) = \cos t i + \sin t j$ en el intervalo de $[0, 2\pi]$

Solución

$$x = \cos t \quad y = \sin t$$

$$x' = -\sin t \quad y' = \cos t$$

$$(x')^2 = \sin^2 t \quad (y')^2 = \cos^2 t$$

$$L = \int_{t=0}^{t=2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1} dt = \int_0^{2\pi} dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi \approx 6.28u$$

Ejemplo 2

Hallar la longitud de arco de la curva $f(t) = t^3 i + 2t^2 j$ si $t \in [0, 1]$

Solución

$$x = t^3 \quad y = 2t^2$$

$$x' = 3t^2 \quad y' = 4t$$

$$(x')^2 = 9t^4 \quad (y')^2 = 16t^2$$

$$L = \int_{t=0}^{t=1} \sqrt{9t^4 + 16t^2} dt = \int_0^1 \sqrt{t^2(9t^2 + 16)} dt = \int_0^1 \sqrt{t^2} \sqrt{9t^2 + 16} dt = \int_0^1 \sqrt{9t^2 + 16} t dt = \frac{1}{18} \int_0^1 (9t^2 + 16)^{\frac{1}{2}} 18t dt$$

$$= \left[\frac{1}{27} (9t^2 + 16)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{27} [125 - 64] = \frac{61}{27} u$$

Ejemplo 3

Hallar la longitud de arco de $f(t) = t^2 i + 2t j$ si $t \in [0, 1]$

Solución

$$x = t^2 \quad y = 2t$$

$$x' = 2t \quad y' = 2$$

$$(x')^2 = 4t^2 \quad (y')^2 = 4$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 4} dt = \int_0^1 \sqrt{4(t^2 + 1)} dt = 2 \int_0^1 \sqrt{t^2 + 1} dt = 2 \left[\frac{t}{2} \sqrt{t^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \right]_0^1$$

$$= t \sqrt{t^2 + 1} + \ln |t + \sqrt{t^2 + 1}| \Big|_0^1 = [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})] - (\ln \sqrt{1}) = 2.29u$$

Ejemplo 4

Hallar la longitud del arco de hélice cilíndrico dado por $f(t) = \sin t i + \frac{t}{2} j + \cos t k$ que va del punto $A(0, 0, 1)$ al $B(0, \frac{\pi}{2}, -1)$ $t \in [0, \pi]$

Solución

$$x = \text{sent} \quad y = \frac{t}{2} \quad z = \cos t$$

$$x' = \cos t \quad y' = \frac{1}{2} \quad z' = -\text{sent}$$

$$(x')^2 = \cos^2 t \quad (y')^2 = \frac{1}{4} \quad (z')^2 = \text{sen}^2 t$$

$$L = \int_0^\pi \sqrt{\cos^2 t + \text{sen}^2 t + \frac{1}{4}} dt = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^\pi dt = \frac{\sqrt{5}}{2} [t]_0^\pi = 3.512u$$

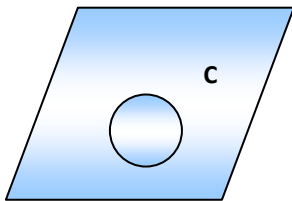
3.6 Vector tangente, normal y binormal.

Vectores Tangente y Normal Unitarios

Definición

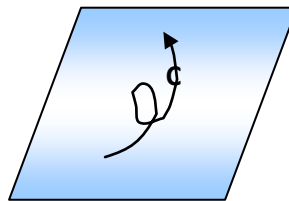
Si $f(t)$ define una curva "c" en un intervalo cerrado $[a, b]$ y tiene una derivada continua distinta de cero sobre $[a, b]$, entonces la curva "c" se llama Curva lisa o Curva plana y se encuentra contenida en un plano en el espacio.

Una curva no plana se llama Curva alabeada



Curva lisa

$$f(t) = \cos t \mathbf{i} + \text{sent} t \mathbf{j} \quad [0, 2\pi]$$



Curva alabeada

$$f(t) = \cos t \mathbf{i} + \frac{1}{2} t \mathbf{j} + \text{sent} t \mathbf{k} \quad [0, 4\pi]$$

Definición

Sea $f(t)$ el vector de posición de la curva "c" en un punto P de la curva. Se llama Vector Tangente Unitario denotado por " $T(t)$ " ó simplemente " T ", al vector unitario tangente a la curva "c" en el punto P dado por:

$$T(t) = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}$$

Definición

Si " $T(t)$ " es el vector tangente unitario de "c" en el punto P, entonces el Vector Normal Unitario denotado por " $N(t)$ " ó simplemente " N " es un vector unitario perpendicular a $T(t)$ dado por:

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$

Ejemplo

Dada la curva $f(t) = (t^3 - 3t)i + 3t^2j$ calcular los vectores $T(t)$ y $N(t)$ en el punto $P(2,3)$.

Solución

$$f(t) = (t^3 - 3t)i + 3t^2j$$

$$x = (t^3 - 3t) \quad y = 3t^2$$

$$-2 = (t^3 - 3t) \quad 3 = 3t^2 ; \quad t^2 = 1 \text{ por lo tanto } t = \pm 1$$

$$f'(t) = (3t^2 - 3)i + 6tj$$

$$|f'(t)| = \sqrt{(3t^2 - 3)^2 + (6t)^2}$$

$$|f'(t)| = \sqrt{9t^4 - 18t^2 + 9 + 36t^2} = \sqrt{9t^4 + 18t^2 + 9} = \sqrt{(3t^2 + 3)^2} = 3t^2 + 3 = 3(t^2 + 1)$$

$$T(t) = \frac{3(t^2 - 1)}{3(t^2 + 1)}i + \frac{6t}{3(t^2 + 1)}j$$

$$T(t) = \frac{(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)}i + \frac{2t}{(t^2 + 1)}j \quad T(1) = j$$

Para obtener la $T'(t)$ usaremos $\frac{u}{v}$

$$y = \frac{u}{v}$$

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$T'(t) = \frac{(t^2 + 1)(2t) - (t^2 - 1)(2t)}{(t^2 + 1)^2}i + \frac{(t^2 + 1)(2) - 2t(2t)}{(t^2 + 1)^2}j = \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2 + 1)^2}i + \frac{2t^2 + 2 - 4t^2}{(t^2 + 1)^2}j$$

$$T'(t) = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2}i + \frac{2 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2}j$$

$$|T'(t)| = \sqrt{\frac{16t^2}{(t^2 + 1)^4} + \frac{(2 - 2t^2)^2}{(t^2 + 1)^4}} = \sqrt{\frac{16t^2 + 4 - 8t^2 + 4t^4}{(t^2 + 1)^4}} = \sqrt{\frac{8t^2 + 4 + 4t^4}{(t^2 + 1)^4}} = \sqrt{\frac{(2 + 2t^2)^2}{(t^2 + 1)^4}} = \frac{2 + 2t^2}{(t^2 + 1)^2}$$

$$|T'(t)| = \frac{2(1 + t^2)}{(t^2 + 1)^2} = \frac{2}{(t^2 + 1)}$$

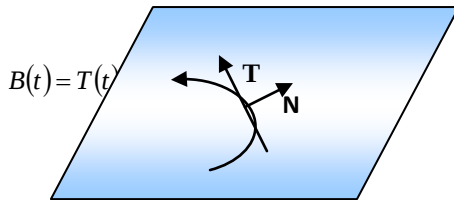
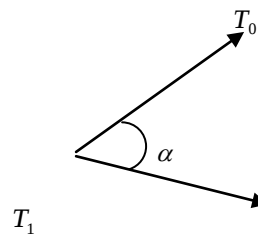
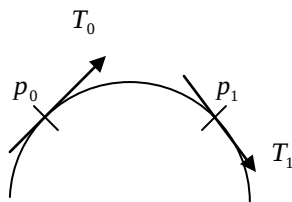
$$N = \frac{\frac{4t}{(t^2 + 1)^2}}{\frac{2}{(t^2 + 1)}}i + \frac{\frac{2(1 - t^2)}{(t^2 + 1)^2}}{\frac{2}{(t^2 + 1)}}j = \frac{2t}{t^2 + 1}i + \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}j \quad N(1) = i$$

Definición

Se llama plano osculador al plano que contiene a una curva lisa c y que está determinado por los vectores " $T(t)$ y $N(t)$ ".

Definición

Se llama Vector Binormal denotado por " $B(t)$ " al vector unitario perpendicular al plano osculador.

**3.7 Curvatura.****Definición**

La razón de cambio de dirección de una curva " c " con respecto a la distancia a lo largo de ella en un punto P se llama Curvatura de " c " y está dado por:

$$k(t) = \frac{|T'(t)|}{|f'(t)|}$$

Definición

Si $k(t)$ es la curvatura de c en un punto P y $k(t) \neq 0$, entonces el radio de curvatura de c está dado por:

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)}$$

Ejemplo

Dada la curva descrita por $f(t) = 2ti + (t^2 - 1)j$, encuentre su curvatura y su radio de curvatura si $t = 1$.

Solución

$$f'(t) = 2i + 2tj$$

$$|f'(t)| = \sqrt{4 + 4t^2} = \sqrt{4(1 + t^2)} = 2\sqrt{1 + t^2}$$

$$T(t) = \frac{2i}{2\sqrt{1 + t^2}} + \frac{2tj}{2\sqrt{1 + t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}i + \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}j$$

$$T(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j$$

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} i + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} j$$

$$T'(t) = -\frac{1}{2}(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}(2t)i + \frac{(1+t^2)^{\frac{1}{2}} - t^2(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{1+t^2})^2} j$$

$$T'(t) = -\frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^3}} i + \frac{(1+t^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{t^2}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}}{1+t^2} j$$

$$T'(t) = -\frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^3}} i + \frac{\frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}}{1+t^2} j$$

$$T'(t) = -\frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^3}} i + \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)^3}} j$$

$$|T'(t)| = \sqrt{\frac{t^2}{(1+t^2)^3} + \frac{1}{(1+t^2)^3}} = \sqrt{\frac{(t^2+1)}{(1+t^2)^3}} = \sqrt{\frac{1}{(1+t^2)^2}} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$N(t) = \frac{\frac{-t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{1+t^2}} i + \frac{\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{1+t^2}} j = \frac{-t}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} i + \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} j$$

$$N(t) = \frac{-t}{\sqrt{1+t^2}} i + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} j$$

$$N(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j$$

$$k(t) = \frac{|T'(t)|}{|f'(t)|} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{2(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \text{curvatura}$$

$$k(1) = \frac{1}{2(1+(1)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2^5}}$$

$$\rho(t) = 2(1+t^2)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \text{radio}$$

$$\rho(1) = \sqrt{2^5}$$

Definición

La Torsión de una curva denotada, por $\tau(t)$ es un número real que indica la medida del torsimiento de una curva con respecto al plano osculador y esta dada por:

$$\tau(t) = \frac{-B'(t)}{|f'(t)| N(t)}$$

$$\tau = 0$$

Ejemplo

Calcular la torsión τ de la hélice cilíndrica $f(t) = \cos t \mathbf{i} + \frac{1}{2} t \mathbf{j} + \sin t \mathbf{k}$ hallar:

a) $T(t)$

b) $N(t)$

c) $B(t)$

d) $k(t)$

e) $\rho(t)$

f) $\tau(t)$

Solución

$$f(t) = \cos t \mathbf{i} + \frac{1}{2} t \mathbf{j} + \sin t \mathbf{k}$$

$$f'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k}$$

$$|f'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \frac{1}{4} + \cos^2 t} = \sqrt{(\sin^2 t + \cos^2 t) + \frac{1}{4}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$T = \frac{f'(t)}{|f'(t)|} = \frac{-\sin t \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = -\frac{2 \sin t}{\sqrt{5}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{j} + \frac{2 \cos t}{\sqrt{5}} \mathbf{k}$$

$$T' = -\frac{2}{\sqrt{5}} \cos t \mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}} \sin t \mathbf{k}$$

$$|T'| = \sqrt{\frac{4}{5} \cos^2 t + \frac{4}{5} \sin^2 t} = \sqrt{\frac{4}{5} (\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$N = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}} \cos t \mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}} \sin t \mathbf{k}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{k}$$

$$B = T \times N = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \sin t & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \cos t \\ -\cos t & 0 & -\sin t \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \sin t \right) - \mathbf{j} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \sin^2 t + \frac{2}{\sqrt{5}} \cos^2 t \right) + \mathbf{k} \left(0 + \frac{1}{\sqrt{5}} \cos t \right)$$

$$B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \sin t \mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cos t \mathbf{k}$$

$$k(t) = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{4}{5} \quad \rho(t) = \frac{5}{4}$$

$$B' = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cos t \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}} \sin t \mathbf{k}$$

$$-B' = \frac{1}{\sqrt{5}} \cos ti + \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{sen} tk$$

$$\tau(t) = \frac{-B'(t)}{|f'(t)| N(t)}$$

$$\tau(t) = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\cos ti + \operatorname{sen} tk)}{-\frac{\sqrt{5}}{2}(\cos ti + \operatorname{sen} tk)} = -\frac{2}{5}$$

Otra fórmula de torsión

$$\tau(t) = \frac{(f' \times f'') \cdot f'''}{|f' \times f''|^2}$$

Ejemplo

Calcular la torsión de la curva cúbica alabeada $f(t) = ti + t^2j + t^3k$ en los puntos $A(0,0,0)$ y $B(2,4,8)$.

Solución

$$f'(t) = i + 2tj + 3t^2k$$

$$f''(t) = 2j + 6tk$$

$$f'''(t) = 6k$$

$$f' \times f'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = i(12t^2 - 6t^2) - j(6t) + k(2) = 6t^2i - 6tj + 2k$$

$$(f' \times f'') \cdot f''' = 12$$

$$|f' \times f''| = \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4}$$

$$|f' \times f''|^2 = 4(9t^4 + 9t^2 + 1)$$

$$\tau(t) = \frac{(f' \times f'') \cdot f'''}{|f' \times f''|^2} = \frac{12}{4(9t^4 + 9t^2 + 1)} = \frac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

Sí $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ por lo tanto:

$$A(0,0,0) \Rightarrow t = 0 \quad \tau(0) = 3$$

$$B(2,4,8) \Rightarrow t = 2 \quad \tau(2) = \frac{3}{144 + 36 + 1} = \frac{3}{181}$$

Unidad IV Funciones de varias variables

4.1 Definición de una función de varias variables.

Introducción

Muchas magnitudes que nos resultan familiares son funciones de dos o más variables independientes. Por ejemplo, el trabajo $w = f \cdot d$ realizado por una fuerza $w = f \cdot d$, el volumen V de un cilindro circular recto $V = V(r, h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$, el área de un triángulo $A = b \cdot h$, son todas funciones de dos variables. El volumen de una caja rectangular $V = V(l, a, h) = l \cdot a \cdot h$ es una función de tres variables.

Denotaremos una función de dos o más variables de la forma usual

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$

$$z = f(x, y) = xyz$$

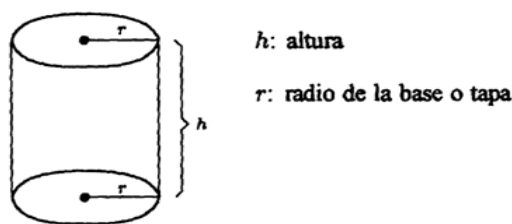
En esta sección se introduce otro importante concepto: las funciones de varias variables. Se introduce también el concepto de derivación parcial. Conceptos muy útiles en las aplicaciones.

Se ha visto la gran utilidad de las funciones en la descripción de los diferentes fenómenos de la naturaleza. Hasta el momento se ha considerado solamente funciones de una variable funciones de una variable:

$$f: R \rightarrow R$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

La explicación y uso del mundo natural y social han planteado, sin embargo, la necesidad de considerar funciones de más de una variable. Por ejemplo, considere el volumen de un cilindro circular recto:



Cilindro circular recto

$$V = \pi r^2 h.$$

El volumen depende de r y de h . Por eso se puede escribir

$$V(r, h) = \pi r^2 h.$$

Es decir, como una función de dos variables r y h .

$$V: (r, h) \mapsto \frac{1}{2} \pi r^2 h$$

Por ejemplo:

$$V(1, 2) = \frac{1}{2} \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = \pi$$

Los ejemplos son muchísimos:

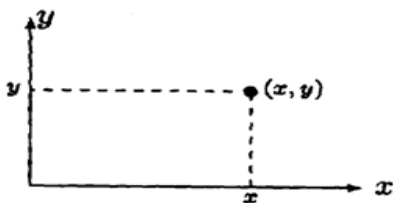
$$V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

es una función de tres variables: x, y, z .

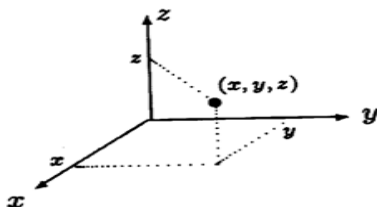
En general, se puede hablar de funciones de varias variables.

4.2 Gráfica de una función de dos variables.

En el caso de las funciones de 2 variables es posible obtener una representación gráfica, al igual que se hace con las funciones de una variable. Sin embargo, la representación se hace en el espacio (en 3 dimensiones) y no en el plano. En lugar de dos ejes de coordenadas x, y :



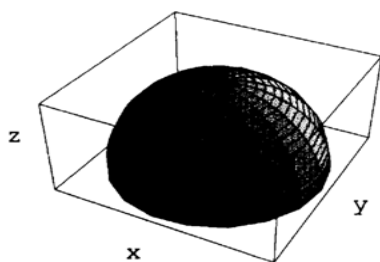
se tienen 3 ejes de coordenadas x, y y z :



Por ejemplo, si

$$z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

se obtiene la mitad de la superficie de la esfera de radio $r = 3$, y con centro en el punto origen $(0, 0, 0)$ (figura 9.14).

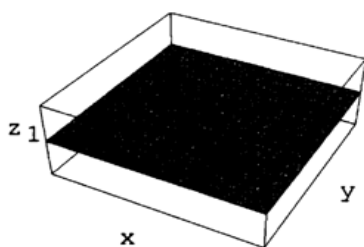


$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Nota: La ecuación

$$z^2 = 9 - x^2 - y^2, \text{ o bien: } z^2 + x^2 + y^2 = 3^2$$

Brinda la superficie de la esfera completa.



El plano $z = 1$

Otro ejemplo: sea $f(x,y) = 1$.

Esto representa un plano paralelo al plano xy (constituido por todos los puntos $(x,y,1)$).

Es interesante señalar que a las funciones de varias variables se les puede aplicar también los métodos del Cálculo Diferencial e Integral, con algunas modificaciones.

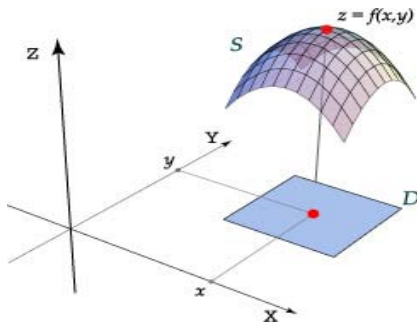
Existen varias maneras de visualizar una función de dos variables, en esta sección lo haremos mediante una superficie en el espacio tridimensional.

Definición (gráfica de funciones de dos variables)

La gráfica de una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es el conjunto de puntos (x, y, z) tales que $z = f(x, y)$ y $x \in D$. Es decir,

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$$

Observación: La gráfica de una función de dos variables $z = f(x, y)$ puede interpretarse geoméricamente como una superficie S en el espacio de forma tal que su proyección sobre el plano xy es D , el dominio de f . En consecuencia, a cada punto (x, y) en D le corresponde un punto (x, y, z) en la superficie y, a la inversa, a cada punto (x, y, z) en la superficie le corresponde un punto (x, y) en D (figura 1).

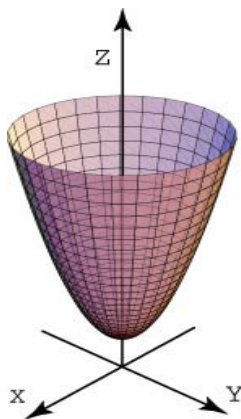


Ejemplo 1

Trace la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$

Solución

La gráfica de esta tipo funciones es muy común y se conocen como paraboloides (figura 2).



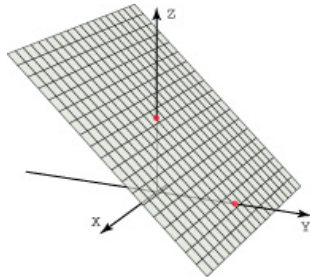
Observación: el paraboloide anterior $z = x^2 + y^2 + 1$ tiene su eje de simetría paralelo al eje z , es de esperar que un paraboloide como $y = x^2 + z^2 + 1$ tenga su eje de simetría paralelo al eje y .

Ejemplo 2

Trace la gráfica de la función $f(x, y) = -y + 2$.

Solución

Esta es otra de las gráficas que usaremos con mucha frecuencia, se trata de un plano $y + z = 2$, su gráfica se muestra en la figura 3.



4.3 Curvas y superficies de nivel.

Debido a que muchas de las superficies S con las que trabajaremos no provienen de una función $z = f(x, y)$, es necesario extender nuestra definición de gráfica.

Definición (superficie)

La gráfica de la ecuación $f(x, y, z) = 0$ es el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que satisfacen ésta ecuación. Usualmente nos referimos a la gráfica de una ecuación como una superficie S .

Definición (traza de una superficie)

La traza de una superficie S en el plano P , es la curva que resulta de la intersección entre ambos.

Ejemplo 3

Compruebe que la traza de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 10$$

sobre el plano $y + z = 4$ es una elipse.

Solución

Para hallar la ecuación de la traza debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 10 \\ y + z = 4 \end{cases}$$

$$z = 4 - y \Rightarrow x^2 + y^2 + (4 - y)^2 = 10 \Rightarrow x^2 + 2(y - 2)^2 = 1$$

que resulta ser una elipse:

$$\frac{x^2}{2} + (y - 2)^2 = 1, \quad z = 4 - y$$

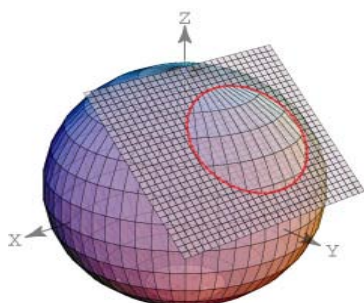
No se acostumbra escribir una curva en la forma anterior pues es difícil de manejar, resulta mucho más cómodo y provechoso trabajar con curvas planas o en el espacio, dadas en forma paramétrica. En este caso la curva se puede escribir paramétricamente como:

$$x = \sqrt{2} \cos \theta$$

$$y = \sin \theta + 2$$

$$z = 2 - \sin \theta$$

con $\theta \in [2, \pi]$. La curva y las superficies se muestran en la figura 4.



Ejemplo 4

Dibuje las trazas del paraboloides $z = x^2 + y^2 + 1$ sobre los planos $y = c$, para cada $c = -2, -1, 0, 1, 2$.

Solución

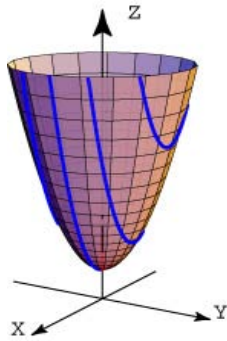
En este caso las trazas corresponden a parábolas: $y = \pm c \Rightarrow z = x^2 + c^2 + 1$ es decir:

$$x = t$$

$$y = \pm c$$

$$z = t^2 + c^2 + 1$$

en su forma paramétrica. En la figura 5 se muestran las trazas y la superficie.



Otra manera de visualizar una superficie es por medio de sus curvas de nivel o mapas de contorno.

Definición (curvas de nivel)

La proyección perpendicular sobre el plano xy , de la traza de la superficie S sobre el plano $z = k$ se conoce como curva de nivel o línea de contorno. Al conjunto de estas curvas de nivel se le llama mapa de contorno.

Observación: también podemos definir curvas de nivel proyectando sobre el plano coordenado yz . Las trazas de la superficie S sobre el plano $x = k$ o proyectando sobre el plano coordenado xz las trazas de la superficie S sobre el plano $y = k$. Aunque no se acostumbra hacerlo, pueden ser de utilidad al trazar la gráfica de una superficie.

Ejemplo 5

Dibujar un mapa de contorno para el hiperboloide parabólico dado por

$$z = f(x, y) = y^2 - x^2$$

La gráfica de esta función se muestra en la figura 6.

Ejemplo 6

Trazar el mapa de contorno para el paraboloide $z = x^2 + y^2 + 1$

Solución

Vamos a analizar tres casos:

- Si $k > 1$, digamos que $k = c^2 + 1$ con $c \neq 0$, entonces

$$x^2 + y^2 + 1 = 1 + c^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = c^2$$

Entonces las curvas de nivel son círculos con centro en $(0,0)$ y radio r .

- Si $k = 1$, entonces

$$x^2 + y^2 + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$$

lo cual corresponde al punto $(0,0)$.

- Si $k < 1$, digamos que $k = 1 - c^2$ con $c \neq 0$, entonces

$$x^2 + y^2 + 1 = 1 - c^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = -c^2$$

Lo cual es imposible y no hay curvas de nivel si se corta con planos por debajo de $z = 1$. El mapa de contorno se muestra en la figura 8.

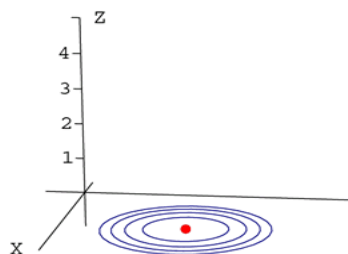


Observación: un mapa de contorno muestra la variación de z con respecto a x e y por el espaciado entre las curvas de nivel. Mucho espacio entre las curvas de nivel indica que z varía lentamente, mientras que un espaciado pequeño indica un cambio rápido en z . Otra cosa importante de notar en la figura 9, es que el radio de la curva de nivel (círculo) es proporcional al valor de k , esto indica que z va creciendo; lo cual concuerda con la forma de la superficie (paraboloide). Un comportamiento contrario indicaría que z decrece. Por otro lado, para proyectar una buena ilusión tridimensional en un mapa de contorno es importante elegir los valores de k de forma que estén espaciados uniformemente.

Ejemplo

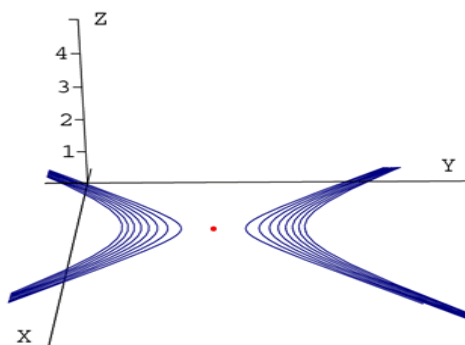
En la figura 9 y la figura 10, se muestran algunas curvas de nivel y, en el ambiente 3D se pueden ver las trazas arrastrando el punto rojo.

Algunas curvas de nivel para $z = (x - 3)^2 + (y - 3)^2$



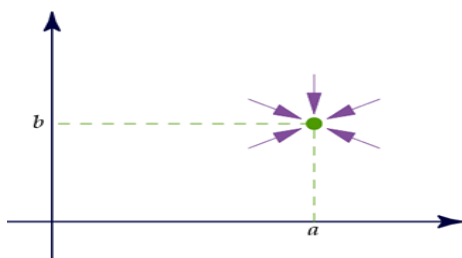
Algunas curvas de nivel para

$$z = (x - 3)^2 - \frac{(y - 5)^2}{4}$$



4.4 Límites y continuidad.

El estudio de los límites de funciones de varias variables es mucho más complejo que el de funciones de una variables, pues en este, únicamente se tiene dos caminos para acercarse a un punto, por la derecha o por la izquierda; mientras que en el caso de varias variables existe una infinidad de caminos para acercarnos a un punto (a, b) , como lo muestra la figura 1.



Comenzaremos el estudio de los límites para funciones de dos variables, el caso para funciones de n variables es análogo. Primero definimos el análogo a un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

Definición (Disco de radio δ y centro P)

Un disco $D(P, \delta)$ abierto, o simplemente un disco, de radio $\delta > 0$ y centro en $P = (a, b)$ es el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que su distancia a (a, b) es menor que δ , es decir

$$D(P, \delta) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \right\} \quad (1)$$

Observación: si en la definición (1) se cambia en $<$ por un $\neq$ obtenemos un disco cerrado

Definición (Límite de una función)

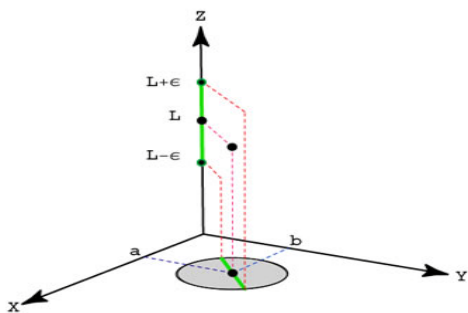
Sea $f : D((a, b), \delta) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables definida en el disco abierto $D((a, b), \delta)$, excepto posiblemente en (a, b) . Entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - L| < \epsilon, \text{ siempre que } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

Observación : gráficamente, esta definición significa que para un punto cualquiera $(x, y) \in D((a, b), \delta)$, el valor de $f(x, y)$ está entre $L + \epsilon$ y $L - \epsilon$, como se ilustra en la figura



Como ya mencionamos, cuando escribimos que $(x, y) \rightarrow (a, b)$ entendemos que el punto (x, y) se aproxima al punto (a, b) en cualquier dirección. Si el valor de

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$$

no es el mismo para todos los posibles caminos o trayectorias de acercarnos a (a, b) , entonces el límite no existe. El siguiente ejemplo muestra esta situación.

Ejemplo 1

Compruebe que el siguiente límite no existe

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Solución

El dominio de esta función es $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Para comprobar que el límite no existe, consideramos dos trayectorias diferentes de acercamiento al punto $(0, 0)$.

Sobre el eje X ($y = 0$) cada punto es de la forma $(x, 0)$ y el límite en esta dirección es:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (x, 0)} \frac{0}{x^2} = 0$$

Sobre la trayectoria $y = x$ cada punto es de la forma (x, x) y el límite en esta dirección es

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x,0)} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Esto quiere decir que en un disco abierto cualquiera centrado en $(0,0)$ existen puntos (x,y) en los cuales f vale $\frac{1}{2}$ y 0 . Luego f no puede tener límite cuando $(x,y) \rightarrow (0,0)$.

Observación: en el ejemplo 1 pudimos concluir que el límite no existe porque encontramos dos caminos que conducen a límites diferentes. Sin embargo, aunque los dos caminos hubieran llevado al mismo límite, no podemos concluir que el límite existe. Para llegar a tal conclusión, debemos demostrar que el límite es el mismo para toda posible trayectoria. Esta tarea no es simple y requiere el uso de la definición misma, como muestra en siguiente ejemplo.

Ejemplo 2

Compruebe que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

Solución

La técnica que usamos con el ejemplo anterior no es adecuada para este caso, pues aunque el límite de cero a través de muchas trayectorias esto no demuestre que este sea su valor; pero nos hace sospechar que el límite existe.

Sea $\epsilon > 0$, queremos encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

es decir

$$\frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} < \epsilon \text{ siempre que } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

como

$$\begin{aligned} x^2 \leq x^2 + y^2 &\implies \frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{x^2} \\ &\implies \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{3x^2|y|}{x^2} = 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leq 3\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Por consiguiente, si elegimos $\delta = \frac{\epsilon}{3}$, entonces

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 3\sqrt{x^2 + y^2} \leq 3\delta = 3\left(\frac{\epsilon}{3}\right) = \epsilon$$

Por consiguiente, por la definición

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

Los límites de funciones de varias variables tienen las mismas propiedades con respecto a las sumas, diferencias, productos y cocientes, que las funciones de una sola variable, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3

Calcule los siguientes límites

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x+y}{x^2 + y^2}$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x-y}{x^3 - y^3}$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,4)} \frac{x-y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

Solución

1. Evaluamos directamente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x+y}{x^2 + y^2} = \frac{1+0}{1^2 + 0^2} = 1$$

2. Para este límite, factorizamos el denominador

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x-y}{x^3 - y^3} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x-y}{(x-y)(x^2 + xy + y^2)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{1}{x^2 + xy + y^2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. Para este límite racionalizamos el denominador

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y) \rightarrow (4,4)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (4,4)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\
&= \lim_{(x,y) \rightarrow (4,4)} \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} \\
&= \lim_{(x,y) \rightarrow (4,4)} \sqrt{x}+\sqrt{y} = 4
\end{aligned}$$

Existen algunas técnicas que a veces resultan útiles en el cálculo de límites. El siguiente ejemplo ilustra el uso de coordenadas polares en el cálculo de un límite.

Ejemplo 4

Use coordenadas polares para comprobar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Solución

Sean (r, θ) las coordenadas polares del punto (x, y) . Entonces, como

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta}{r} \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} r \sin \theta \cos \theta = 0
\end{aligned}$$

pues, $|\sin \theta \cos \theta| \leq 1$ para cualquier valor de θ .

El siguiente ejemplo muestra una situación que podría llevarnos a pensar que el límite existe.

Ejemplo 5

Estudie la existencia del siguiente límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$$

Solución

Si usamos trayectorias rectas que pasan por el origen $y = mx$, donde $m \neq 0$, tenemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \lim_{(x,mx) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 mx}{x^6 + (mx)^2} = \frac{0}{m^2} = 0$$

Ahora usemos como trayectorias las parábolas de la forma $y = mx^2$, con $m \neq 0$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \lim_{(x,mx^2) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 mx^2}{x^6 + (mx^2)^2} = \frac{0}{m^2} = 0$$

Esto nos podría llevar a concluir que el límite es cero, pues las rectas y parábolas que pasan por el origen son una infinidad de trayectorias. Pero, observe que al usar la trayectoria $y = x^3$, obtenemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \lim_{(x,x^3) \rightarrow (0,0)} \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, el límite no existe.

Definición (Continuidad en un punto)

Sea $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables, sea $P = (a, b) \in R$ y sea $D(P, \delta) \subset R$ un disco abierto centrado en P y de radio δ , decimos que f es continua en $P = (a, b)$ si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Decimos que f es continua en la región R si es continua en cada punto de la región.

Observación : la segunda función del ejemplo 3 no es continua, pues $f(1,1)$ no existe, pero podemos hacerla continua redefiniendo $f(1,1)$ como $\frac{1}{3}$.

Usando las propiedades de los límites podemos obtener el siguiente teorema sobre la continuidad de la suma producto y cociente.

Ejemplo 6

Compruebe que la siguiente función es continua en $(0,0)$.

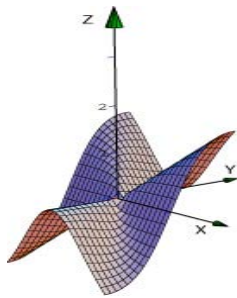
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy}{x+y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x=y=0 \end{cases}$$

Solución

Del ejemplo 2 tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

por lo cual, la función f es continua en $(0,0)$. La gráfica de la función se muestra en la figura



Observación : los ejes en la figura 3 se han variado un poco con respecto a la forma usual en la que los hemos estado usando con el propósito de que la superficie se pueda apreciar mejor.

Ejemplo 7

Considere la función f

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x-y^2}$$

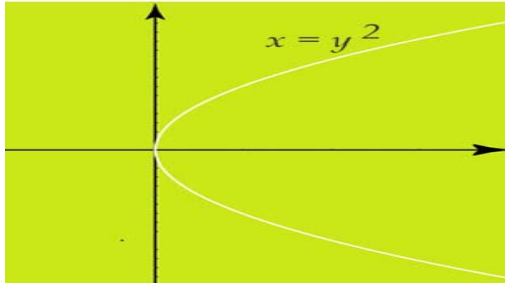
¿Dónde es continua la función f ?

Solución

Observe que la función no está definida para los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en donde $x = y^2$, por lo tanto es discontinua en dichos puntos. Es decir, es continua en :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ con } x \neq y^2\}$$

En la figura se muestra la región en la cual f es continua.



Teorema (Operaciones con funciones continuas)

Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de dos variables continua en $(a, b) \in D$ y sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de una sola variable, entonces la composición de funciones $h = g \circ f$, definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$ es continua en

Ejemplo 8

Considere la función f

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$$

¿Dónde es continua f ?

Solución

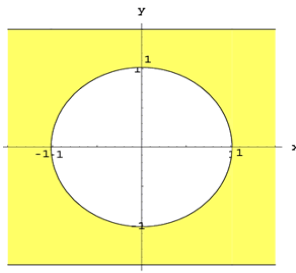
Si $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ y $g(t) = \ln(t)$, entonces

$$g(f(x, y)) = g(x^2 + y^2 - 1) = \ln(x^2 + y^2 - 1) = h(x, y)$$

de modo que $h = g \circ f$. Por otro lado, f es un polinomio y es continua en todo $\mathbb{R}^2$, y g es continua para $t > 0$. Por lo tanto, h será continua en

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 > 1\}$$

que corresponde al exterior del círculo $x^2 + y^2 = 1$, en la figura 5 se muestra esta región.



4.5 Definición de derivadas parciales de funciones de dos variables, así como su interpretación geométrica.

Sea $z = f(x, y)$ una función de las variables independientes x e y . Como x e y son independientes, podremos (i) variar x manteniendo constante y , (ii) variar y manteniendo constante x , (iii) variar x e y simultáneamente. En los dos primeros casos, z es una función de una sola variable y se puede hallar su derivada de acuerdo con las expresiones clásicas que ya hemos visto.

Si x varía permaneciendo constante y , z es una función de x y su derivada con respecto a esta variable x ,

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

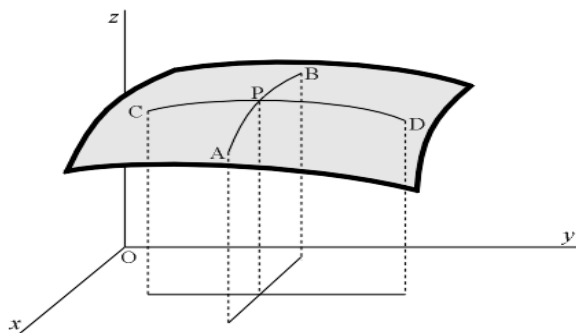
se denomina **primera derivada parcial de $z = f(x, y)$ con respecto a x** .

Si lo que varía es y permaneciendo constante x , z es una función de y y su derivada con respecto a y

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

recibe el nombre de **primera derivada parcial de $z = f(x, y)$ con respecto a y** ...

Las derivadas parciales anteriores admiten una interpretación geométrica muy sencilla. Consideremos la superficie $z = f(x, y)$ de la Fig. 56-1, y sean APB y CPB las intersecciones con dicha superficie de los planos que pasando por P sean paralelos a los xOz e yOz , respectivamente. Si hacemos variar a x permaneciendo constante y , el punto P se desplazará a lo largo de la curva APB y el valor de $\frac{\partial z}{\partial x}$ en el punto P es la pendiente de la curva APB en P.



Análogamente, si hacemos variar y permaneciendo constante x , P se moverá a lo largo de la curva CPD , y el valor de $\frac{\partial z}{\partial y}$ en P es la pendiente de la curva CPD en P .

Resolver los siguientes reactivos

1) Calcular la derivada parcial f_x de $f(x, y) = 3x - x^2y^2$

a) $f_x(x, y) = 3 - 2xy^2$

b) $f_x(x, y) = 5 - 3xy^2$

c) $f_x(x, y) = 7 - 5xy^2$

d) $f_x(x, y) = 9 - 7xy^2$

e) $f_x(x, y) = 11 - 12xy^2$

2) Calcular la derivada parcial f_y de $f(x, y) = 3x - x^2y^2$

a) $f_y(x, y) = -2yx^2$

b) $f_y(x, y) = -4yx^2$

c) $f_y(x, y) = -6yx^2$

d) $f_y(x, y) = -8yx^2$

e) $f_y(x, y) = -12yx^2$

3) Calcular la derivada parcial f_x de $f(x, y) = 3y - x^2y^2$

a) $f_x(x, y) = -2xy^2$

b) $f_x(x, y) = -4xy^2$

c) $f_x(x, y) = -6xy^2$

d) $f_x(x, y) = -8xy^2$

e) $f_x(x, y) = -12xy^2$

4) Calcular la siguiente deriva f_y de $f(x, y) = 3y - x^2y^2$

a) $f_y(x, y) = 3 - 2yx^2$

b) $f_y(x, y) = 5 - 3yx^2$

c) $f_y(x, y) = 7 - 5yx^2$

d) $f_y(x, y) = 9 - 7yx^2$

e) $f_y(x, y) = 13 - 9yx^2$

5) Calcular la derivada parcial f_x de $f(x, y) = 5x - 2xy$

a) $f_x(x, y) = 5x - 2y$

$$b) \quad f_x(x, y) = 7x - 5y$$

$$c) \quad f_x(x, y) = 9x - 7y$$

$$d) \quad f_x(x, y) = 11x - 9y$$

$$e) \quad f_x(x, y) = 13x - 11y$$

4.6 Derivadas parciales de orden superior

Sea $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, G abierto y no vacío. Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe para todos los puntos de G . En consecuencia la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ es una nueva función definida en el mismo conjunto G , es decir una nueva función de las n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$. En otras palabras,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, nada nos impide volver a considerar derivadas parciales de esta nueva función respecto a las mismas variables $x_1, x_2, \dots, x_n$. En el caso que estas derivadas existan, se denominan derivadas de segundo orden. Por

ejemplo, si derivamos la función $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ respecto a la variable x_j la segunda derivada resultantes se escribirá en cualesquiera de las siguientes formas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}); \quad f_{x_i x_j}(\mathbf{a}); \quad D_{i,j}f(\mathbf{a}); \quad D_{x_i x_j}f(\mathbf{a}).$$

En el caso especial, en que $i = j$, es costumbre usar, en lugar de la primera forma indicada arriba, la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{a}).$$

Las otras formas de notación no varían. En el caso que $i \neq j$ se habla de *derivada parcial mixta*.

Derivadas parciales de orden superior se definen y se denotan usando un patrón similar al de las derivadas de segundo orden. Por ejemplo, si primero derivamos respecto a la variable x_i después respecto a la variable x_j luego dos veces respecto a la primera variable x_i y finalmente respecto a la variable x_k , la derivada parcial resultante será de 5^o orden y se denotará por,

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_i^2 \partial x_k}(\mathbf{a}).$$

Ejemplo

Encuentre todas las derivadas parciales de segundo orden de la función:

$$f(x, y, z) = x^2 + y \sin(xz).$$

Solución. Las derivadas de primer orden son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + yz \cos(xz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(xz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy \cos(xz)$$

Las derivadas mixtas de segundo orden son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z \cos(xz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = y \cos(xz) - xyz \sin(xz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = x \cos(xz).$$

Finalmente, el resto de las derivadas parciales de segundo orden son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - yz^2 \sin(xz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -x^2 y \sin(xz)$$

En general una función de n variables tiene n^2 derivadas de segundo orden y de ellas $n(n-1)$ son mixtas.

Si se observa cuidadosamente el problema anterior, se puede ver que las derivadas mixtas no cambian de valor si permutamos las variables. Esto es, se cumple que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

La igualdad de las derivadas mixtas, resultado demostrado por Nikolaus I Bernoulli (1687-1759) sobrino de los famosos hermanos Johann y Jakob Bernoulli, se cumple siempre que ellas sean continuas. La continuidad de las derivadas es esencial, como puede verse en el siguiente ejemplo clásico:

Ejemplo

Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Demuestre que sus derivadas parciales mixtas de segundo orden existen en $(0,0)$ pero no son iguales.

Solución. Si $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, k) - f(x, 0)}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} x \frac{x^2 - k^2}{x^2 + k^2} \\ &= x\end{aligned}$$

Observe que esta expresión también es válida para $x = 0$.

Análogamente para todo $y \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} y \frac{h^2 - y^2}{h^2 + y^2} \\ &= -y.\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k - 0}{k} \\ &= -1.\end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} \\ &= 1.\end{aligned}$$

En consecuencia $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Por consiguiente, al menos una de las derivadas mixtas no es continua en $(0, 0)$.

Una función $u = u(x, y)$ con segundas derivadas parciales continuas y que cumpla con la ecuación, $(\nabla^2 u)(x, y) = 0$ para todo (x, y) en su dominio, se denomina función armónica. La expresión diferencial,

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

se denomina "operador laplaciano" (en honor al matemático francés Pierre Simon Laplace (1749-1827), quien, mediante complejos razonamientos matemáticos demostró que nuestro sistema solar es estable y por consiguiente las órbitas de los diversos cuerpos celestes de nuestro sistema son de carácter eterno. Este trabajo incluido en su gran obra "Mécanique celeste" es considerado como el trabajo que marca un hito en las aplicaciones de la teoría de la gravitación de Newton. Napoleón, contemporáneo de Laplace y gran admirador, tanto de la Ciencia como de los grandes científicos, preguntó un día a Laplace la razón por la cual no había ninguna mención de Dios en su trabajo sobre el sistema solar, ya que en todo caso, éste trataba sobre la estabilidad de nuestro sistema celestial. ¿acaso ya no era necesaria la intervención divina? Se dice que Laplace se disculpó señalando que no tuvo necesidad de usar esa Hipótesis. Cuando le contaron esta anécdota a Joseph Louis de Lagrange (1736-1813), éste se limitó a comentar "Ah, ¡pero era una maravillosa Hipótesis!").

Corolario

Sea $G \subseteq \mathbb{R}^n$ una región y suponga que $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ es una función cuyas derivadas parciales hasta el n -ésimo orden son continuas en G . Suponga además que p y q son dos números naturales tales que $p + q = n \geq 2$. Entonces:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_i^q \partial x_j^p} = \frac{\partial^n f}{\partial x_j^p \partial x_i^q}$$

Demostración. Use inducción.

Ejemplo

Considere la siguiente función:

$$f(x, y) = x \sin(xy).$$

Compruebe que:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}.$$

Solución. Las derivadas de primer orden son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(xy) + xy \cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos(xy)$$

Ahora, las derivadas correspondientes derivadas de segundo orden son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^3 \sin(xy)$$

Finalmente las derivadas de tercer orden pedidas en el problema son:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = -3x^2 \sin(xy) - x^3 y \cos(xy),$$

que, como era de esperarse, resultan ser iguales, pues la función f tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes.

4.7 Incrementos, diferenciales y regla de la cadena.

Para funciones de una variable $y = f(x)$, se define el incremento de y como

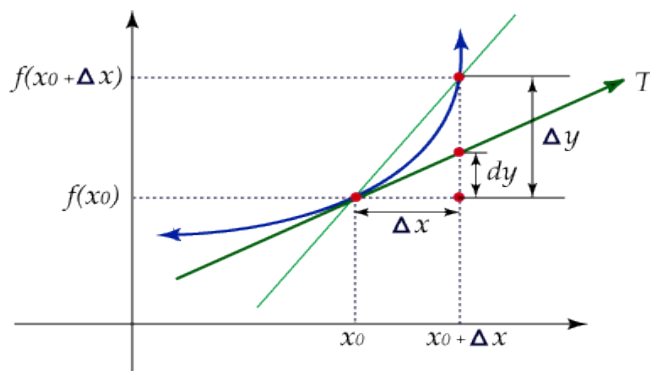
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

y la diferencial de y como

$$dy = f'(x)dx$$

Δy representa el cambio en la altura de la curva $y = f(x)$ y dy representa la variación en y a lo largo de la recta tangente cuando x varía en una cantidad $dx = \Delta x$.

En la siguiente figura se muestra df y Δf .



Observe que $\Delta y - dy$ se aproxima a cero más rápidamente que Δx , ya que

$$\epsilon = \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x)$$

y al hacer $\Delta x \rightarrow 0$, tenemos que $\epsilon \rightarrow 0$.

Por tanto

$$\Delta y = dy + \epsilon \Delta x$$

donde $\epsilon \rightarrow 0$ conforme $\Delta x \rightarrow 0$.

Ahora consideremos una función de dos variables $z = f(x, y)$.

Si x y y son incrementados Δx y Δy , entonces el correspondiente incremento de z es

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Con lo cual Δz representa el cambio en el valor de f cuando (x, y) cambia a $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Definición

Sean $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar y Δx y Δy incrementos de x y de y , entonces la diferencial total de la variable dependiente z es

$$dz = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

Ejemplo

Calcule la diferencial total para la función

$$f(x, y) = \sqrt{2x^3 + y^2}$$

Las derivadas parciales están dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{2x^3 + y^2}}$$

de donde

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 + y^2}} \Delta x + \frac{y}{\sqrt{2x^3 + y^2}} \Delta y$$

Teorema (aproximación lineal)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar continua en D . Suponga que Δx y Δy son incrementos de x y de y , lo suficientemente pequeños para que $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$, entonces si las derivadas parciales f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0) el incremento de la variable dependiente z

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

puede escribirse como

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

donde

$$\epsilon_1 \longrightarrow 0 \text{ cuando } \Delta x \longrightarrow 0$$

$$\epsilon_2 \longrightarrow 0 \text{ cuando } \Delta y \longrightarrow 0$$

Los incrementos Δx y Δy se les llama diferenciales de las variables independientes y se denotan por dx y dy .

Observación: Este teorema afirma que el cambio real en z es aproximadamente igual a la diferencial total dz , cuando los incrementos Δx y Δy son pequeños, es decir, $\Delta z \cong dz$.

Ejemplo

El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden 10cm y 25cm , respectivamente, con un posible error en la medición de 0.1cm , cuando mucho. Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el volumen del cono.

Solución

El volumen de un cono es $V = \pi r^2 h / 3$, con lo cual la diferencial total es

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = \frac{2\pi r h}{3} dr + \frac{\pi r^2}{3} dh$$

Puesto que los errores son, cuando mucho, del orden de 0.1cm , tenemos que $|\Delta x| \leq 0.1$ y $|\Delta y| \leq 0.1$. Para estimar el máximo error en el volumen, tomanos el máximo error en las medidas de r y h . Por tanto, $dr = 0.1$ y $dh = 0.1$, junto con $r = 10, h = 25$

$$dV = \frac{500}{3} 0.1 + \frac{100\pi}{3} 0.1 = 20\pi$$

De esta forma el máximo error en el volumen es de aproximadamente $20\pi\text{cm} \cong 63\text{cm}$.

Para que una función de varias variables sea derivable en un punto

(a, b)

no basta con que las derivadas parciales existan, esto nos dice que la derivabilidad de una función de varias variables es más compleja que la de una variable.

Definición (diferenciabilidad)

Dada una función escalar $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua en D con derivadas parciales f_x y f_y son continuas en $(x_0, y_0) \in D$, si Δz puede expresarse como

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

donde

$$\epsilon_1 \rightarrow 0 \text{ cuando } \Delta x \rightarrow 0$$

$$\epsilon_2 \rightarrow 0 \text{ cuando } \Delta y \rightarrow 0$$

decimos que f es diferenciable en (x_0, y_0) .

Observación: Es decir, que una función f es diferenciable en (x_0, y_0) si la diferencial total dz es una buena aproximación al incremento total Δz . En otras palabras, la función lineal

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

es una buena aproximación de la función f cerca de (x_0, y_0) . Por consiguiente, por el teorema de aproximación lineal, si f_x y f_y existen cerca de (x_0, y_0) y son continuas en este punto, entonces f es diferenciable en este punto.

Ejemplo

Use diferenciales para calcular un valor aproximado para

$$\sqrt{3(1.95)^3 + (5.1)^2}$$

Solución

Consideremos la función $f(x, y) = \sqrt{3(x)^3 + (y)^2}$ y observe que podemos calcular con facilidad $f(2, 5) = 7$. Por lo tanto, tomando $x_0 = 2$ y $y_0 = 5$, $dx = \Delta x = -0.05$ y $dy = \Delta y = 0.1$, obtenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{3(1.95)^3 + (5.1)^2} &= f(1.95, 5) \\ &= f(2.5) + df \\ &= 7 + f_x(2.5)dx + f_y(2.5)dy \\ &= 7 + \frac{12}{7}(-0.05) + \frac{5}{7}(0.1) \\ &= 6.98571\end{aligned}$$

La diferencial de f fue calculada en el ejemplo 1.

Al igual que para funciones de una variable la diferenciabilidad implica continuidad, como vemos en el siguiente teorema.

Definición (diferenciabilidad y continuidad)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de escalar diferenciable en $(a, b) \in D$, entonces f es continua en (a, b) .

4.8 Derivación parcial implícita.

Funciones explícitas y funciones implícitas

En los cursos de cálculo la mayor parte de las funciones con que trabajamos están expresadas en **forma explícita**, como en la ecuación

$$y = 4x^2 + 3$$

dónde la variable y está escrita explícitamente como función de x . Sin embargo, muchas funciones, por el contrario, están implícitas en una ecuación. La función $y = 1/x$, viene definida **implícitamente** por la ecuación: $xy = 1$.

Si queremos hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ para esta última ecuación, lo hacemos despejando y, así, $y = 1 / x = x^{-1}$, obteniendo su derivada fácilmente:

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

El método sirve siempre y cuando seamos capaces de despejar y en la ecuación. El problema es que sino se logra despejar y, es inútil este método. Por ejemplo, ¿cómo hallar dy/dx para la ecuación $x^2 - 2y^3 + 4y = 2$, donde resulta muy difícil despejar y como función explícita de x?

El método de regla de la cadena para funciones implícitas

Ya sabemos que cuando se derivan términos que solo contienen a x, la derivación será la habitual. Sin embargo, cuando tengamos que derivar un término donde aparezca la y, será necesario aplicar la regla de la cadena.

Ejemplo

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Aquí las variables coinciden: se deriva normalmente.

Ejemplo

$$\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2 \frac{dy}{dx}$$

Aquí las variables **no** coinciden: se usa regla de la cadena.

Ejemplo

Hallar $\frac{dy}{dx}$, de la función implícita:

$$ax^6 + 2x^3y - y^7x = 10$$

Aplicando la notación $\frac{d}{dx}$, a cada término y extrayendo las constantes;

$$a \frac{d}{dx}(x^6) + 2 \frac{d}{dx}(x^3y) - \frac{d}{dx}(y^7x) = \frac{d}{dx}(10).$$

En el primer término las variables coinciden, se deriva normalmente, en el segundo término se aplica la derivada de un producto (primer paréntesis cuadrado), lo mismo en el tercer término.

$$6ax^5 + 2\left[\frac{d}{dx}(x^3)y + x^3 \frac{dy}{dx} \right] - \left[\frac{d}{dx}(y^7)x + \frac{d}{dx}(x)y^7 \right] = \frac{d}{dx}(10)$$

La regla de la cadena se aplica el término $\frac{d}{dx}(y^7)$, como puede observarse a continuación claramente en el segundo paréntesis,

$$6ax^5 + 2\left[3x^2y + x^3 \frac{dy}{dx} \right] - \left[7y^6 \frac{dy}{dx}x + y^7 \right] = 0$$

quitando paréntesis y ordenando los términos,

$$6ax^5 + 6x^2y + 2x^3 \frac{dy}{dx} - 7xy^6 \frac{dy}{dx} - y^7 = 0$$

pasando algunos términos al lado derecho,

$$2x^3 \frac{dy}{dx} - 7xy^6 \frac{dy}{dx} = y^7 - 6ax^5 - 6x^2y$$

extrayendo el factor común $\frac{dy}{dx}$,

$$(2x^3 - 7xy^6) \frac{dy}{dx} = y^7 - 6ax^5 - 6x^2y$$

y finalmente despejando, obtenemos la respuesta requerida:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^7 - 6ax^5 - 6x^2y}{2x^3 - 7xy^6}$$

dy/dx con derivadas parciales

Mucho del trabajo anterior podría omitirse si usáramos la fórmula siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x}$, representa la derivada parcial de la función f, con respecto a x,

$\frac{\partial f}{\partial y}$, y $\frac{\partial f}{\partial y}$, representa la derivada parcial de la función f, respecto a la variable y.

Ejemplo

Hallar $\frac{dy}{dx}$, de la función implícita:

$$ax^6 + 2x^3y - y^7x = 10$$

Solución:

Primero,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6ax^5 + 6x^2y - y^7$$

segundo,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 - 7xy^6$$

ahora el cociente,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{6ax^5 + 6x^2y - y^7}{2x^3 - 7xy^6}$$

acomodando el signo menos en el numerador, obtenemos el resultado:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^7 - 6ax^5 - 6x^2y}{2x^3 - 7xy^6}$$

Para usar la fórmula se debe introducir al alumno a las derivadas parciales con algunos ejemplos. Obviando la teoría de las mismas que no es necesaria para el tema de derivación implícita.

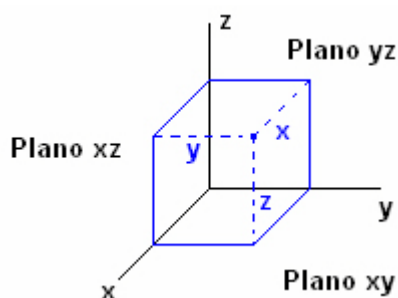
4.9 Coordenadas cilíndricas y esféricas.

Se muestran tres diferentes sistemas ortogonales de coordenadas de uso común en estudios de electromagnetismo.

Las matrices de transformación entre los diferentes sistemas de coordenadas cumplen todas las propiedades algebraicas para transformaciones ortonormales, a saber:

- La matriz de transformación directa es simplemente la transpuesta de la matriz de transformación inversa.
- El determinante de la matriz de transformación es unitario.

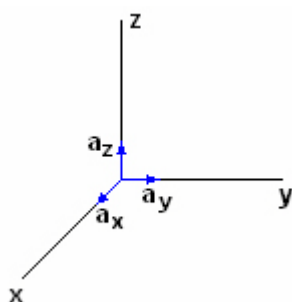
Coordenadas Rectangulares: En el sistema de coordenadas rectangulares, también denominadas coordenadas cartesianas en honor a su inventor, el matemático francés Rene Descartes, la posición de un punto se encuentra determinada por tres números independientes que definen las distancias a los llamados planos coordenados. En la siguiente efigura, se pueden observar los tres planos coordenados que forman ángulos rectos entre si y cuyas intersecciones son los llamados ejes coordenados. Las distancias perpendiculares medidas a los planos coordenados constituyen las coordenadas de la posición del punto dado.



Sistema de coordenadas cartesianas.

Un vector en coordenadas cartesianas se puede notar usando las proyecciones del vector sobre los ejes coordenados y un conjunto de tres vectores directores que apuntan en dirección de dichos ejes.

En la siguiente figura, se muestran los vectores unitarios directores del sistema de coordenadas rectangulares.



Vectores unitarios del sistema de coordenadas cartesianas.

De acuerdo con las propiedades del producto escalar, un vector cualquiera se nota en el sistema de coordenadas cartesianas como:

$$\vec{A} = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$$

Donde, A_x, A_y, A_z son las proyecciones del vector **A** sobre los ejes coordenados $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ respectivamente y $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ son los vectores unitarios directores del sistema de coordenadas cartesianas.

El vector posición de cualquier punto en coordenadas cartesianas por tanto viene dado por:

$$\vec{X} = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z$$

Vector posición en coordenadas cartesianas.

Los productos vectoriales de los vectores directores del sistema de coordenadas cartesianas siguen una regla de rotación:

$$\begin{aligned}\vec{a}_x \times \vec{a}_y &= \vec{a}_z \\ \vec{a}_y \times \vec{a}_z &= \vec{a}_x \\ \vec{a}_z \times \vec{a}_x &= \vec{a}_y\end{aligned}$$

Rotación en los productos vectoriales del sistema cartesiano.

Ejemplo 6 - Aplicación de la propiedad distributiva del producto vectorial en coordenadas cartesianas?

Calcule el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ dados los vectores $\vec{A} = 2\vec{a}_x - 3\vec{a}_z$ y $\vec{B} = \vec{a}_y - \vec{a}_z$

Solución

El problema se puede resolver aplicando la propiedad anticonmutativa, la distributiva y haciendo uso de la Ecuación 10 como se muestra a continuación:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (2\vec{a}_x - 3\vec{a}_z) \times (\vec{a}_y - \vec{a}_z)$$

Se aplica la propiedad distributiva

$$\vec{A} \times \vec{B} = 2\vec{a}_x \times \vec{a}_y - 2\vec{a}_x \times \vec{a}_z - 3\vec{a}_z \times \vec{a}_y + 3\vec{a}_z \times \vec{a}_z$$

Se hace uso de la Ecuación 10 y de la propiedad anticonmutativa

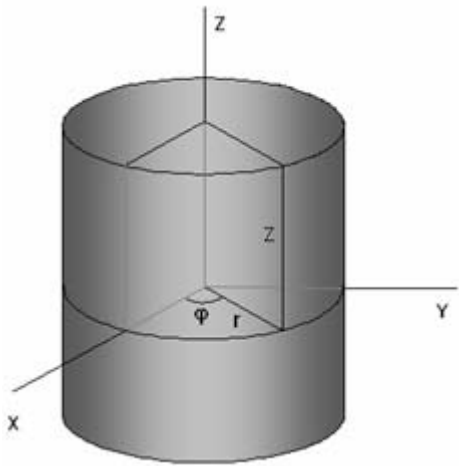
$$\vec{A} \times \vec{B} = 2\vec{a}_z + 2\vec{a}_y + 3\vec{a}_x$$

Coordenadas cilíndricas

El sistema de coordenadas cilíndricas utiliza como base el sistema de coordenadas polares en 2D proyectado hacia el espacio usando la coordenada z del sistema de coordenadas cartesianas.

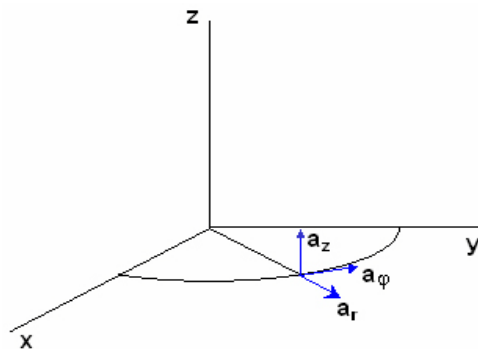
En este sistema, las coordenadas x e y son reemplazadas por un vector dirigido a la proyección del punto sobre el plano XY cuya magnitud es igual a la distancia del punto al eje z , la cual es la primera coordenada del sistema. El ángulo de dirección de dicho vector medido con respecto al semieje x positivo constituye la segunda coordenada del sistema y la tercera coordenada coincide con la coordenada z del sistema cartesiano.

En la siguiente figura, pueden observarse las tres coordenadas asociadas a un punto en el sistema cilíndrico de coordenadas.



Sistema de Coordenadas cilíndrica

En este sistema de coordenadas al igual que en el sistema cartesiano, existen tres vectores directores que permiten indicar la dirección de un vector. La siguiente figura, ilustra los tres vectores directores del sistema.



Vectores directores del sistema de coordenadas cilíndricas.

Un vector en coordenadas cilíndricas queda definido por:

$$\vec{A} = A_r \vec{a}_r + A_\varphi \vec{a}_\varphi + A_z \vec{a}_z$$

Donde A_r es la proyección radial del vector con respecto al eje z sobre el plano XY , A_φ es la componente angular medida con respecto al semieje x positivo y A_z coincide con la componente cartesiana del mismo nombre.

Al igual que en el sistema cartesiano, los productos vectoriales de los vectores directores del sistema de coordenadas cilíndricas siguen una regla de rotación:

$$\begin{aligned} \vec{a}_r \times \vec{a}_\varphi &= \vec{a}_z \\ \vec{a}_z \times \vec{a}_r &= \vec{a}_\varphi \\ \vec{a}_\varphi \times \vec{a}_z &= \vec{a}_r \end{aligned}$$

Rotación en los productos vectoriales del sistema de coordenadas cilíndricas.

El vector posición de cualquier punto en coordenadas cilíndricas queda definido por:

$$\vec{X} = r \vec{a}_r + z \vec{a}_z \quad ; \quad \varphi = \varphi_0$$

Los vectores $\vec{a}_r$ y $\vec{a}_\varphi$ del sistema de coordenadas cilíndricas, cambian de dirección de acuerdo con la coordenada φ ; a diferencia de los vectores del sistema cartesiano que son constantes e independientes de las coordenadas.

Esta característica, debe ser tomada en cuenta para la derivación o integración directa cuando se involucra la coordenada φ .

Para estos casos, resulta muy conveniente usar las identidades de los vectores unitarios que permiten convertir un vector de un sistema de coordenadas a otros.

A continuación se muestra la matriz de transformación de coordenadas cilíndricas a cartesianas y la matriz de transformación inversa.

Estas matrices fueron obtenidas por el método de suma de proyecciones de un sistema de coordenadas sobre otro, por lo que los productos escalares entre vectores de diferentes sistemas de coordenadas pueden obtenerse de forma directa por el cruce de filas y columnas de la matriz directa o inversa.

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad z = z$$

Transformación de coordenadas cilíndricas a cartesianas.

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

Transformación de coordenadas cartesianas a cilíndricas.

Ejemplo 7 - Transformación de coordenadas cartesianas a cilíndricas

Dado un punto en cartesianas (-3,-4,5). Hallar las coordenadas cilíndricas que corresponden al punto dado.

Solución

De la Ecuación 13: $r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5 \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{-3}\right) = 233^\circ \quad z = 5$

Ejemplo 8 - Transformación de coordenadas cilíndricas a cartesianas

Expresar los vectores $\vec{a}_\varphi$ y $\vec{a}_r$ en coordenadas cartesianas y calcule sus componentes para los ángulos. a) $\varphi = \pi/4$ b) $\varphi = 2\pi/3$ c) $\varphi = 7\pi/6$ d) $\varphi = 5\pi/3$.

Solución

De la matriz de transformación de la Ecuación 12 para la transformación de $\vec{a}_\varphi$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto: $\vec{a}_\varphi = -\sin \varphi \vec{a}_x + \cos \varphi \vec{a}_y$

Para el caso de $\vec{a}_r$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto: $\vec{a}_r = \cos \varphi \vec{a}_x + \sin \varphi \vec{a}_y$

Reemplazando para los diferentes ángulos se tiene:

a) $\vec{a}_\varphi = -\sin(\pi/4)\vec{a}_x + \cos(\pi/4)\vec{a}_y = -0.707 \vec{a}_x + 0.707 \vec{a}_y$

b) $\vec{a}_\varphi = -\sin(2\pi/3)\vec{a}_x + \cos(2\pi/3)\vec{a}_y = -0.866 \vec{a}_x + 0.5 \vec{a}_y$
 $\vec{a}_r = \cos(2\pi/3)\vec{a}_x + \sin(2\pi/3)\vec{a}_y = -0.5 \vec{a}_x + 0.866 \vec{a}_y$

c) $\vec{a}_\varphi = -\sin(7\pi/6)\vec{a}_x + \cos(7\pi/6)\vec{a}_y = 0.5 \vec{a}_x - 0.866 \vec{a}_y$
 $\vec{a}_r = \cos(7\pi/6)\vec{a}_x + \sin(7\pi/6)\vec{a}_y = -0.866 \vec{a}_x - 0.5 \vec{a}_y$

d) $\vec{a}_\varphi = -\sin(5\pi/3)\vec{a}_x + \cos(5\pi/3)\vec{a}_y = 0.866 \vec{a}_x + 0.5 \vec{a}_y$
 $\vec{a}_r = \cos(5\pi/3)\vec{a}_x + \sin(5\pi/3)\vec{a}_y = 0.5 \vec{a}_x - 0.866 \vec{a}_y$

Ejemplo 9 - Transformación de funciones vectoriales de coordenadas cilíndricas a cartesianas.

Dada una función vectorial $\vec{A} = 3r\text{Sen}^2\varphi\vec{a}_r + 3r\text{Sen}\varphi\text{Cos}\varphi\vec{a}_\varphi + 3z\vec{a}_z$

- a) Evalúe la función en el punto $r = 5$ $\varphi = 210^\circ$ $z = 1$
- b) Exprese la función en coordenadas cartesianas
- c) Transforme a coordenadas cartesianas el punto dado en a.
- d) Evalúe la función obtenida en b en el punto obtenido en c.

Solución

a) $\vec{A} = 3.750\vec{a}_r + 6.495\vec{a}_\varphi + 3\vec{a}_z$

b) A partir de la matriz de transformación:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos}\varphi & -\text{Sen}\varphi & 0 \\ \text{Sen}\varphi & \text{Cos}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3r\text{Sen}^2\varphi \\ 3r\text{Sen}\varphi\text{Cos}\varphi \\ 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3r\text{Sen}\varphi \\ 3z \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

La función vectorial queda: $\vec{A} = 3y\vec{a}_y + 3z\vec{a}_z$

c) $x = r\text{Cos}\varphi = -4.33$ $y = r\text{Sen}\varphi = -2.5$ $z = z = 1$

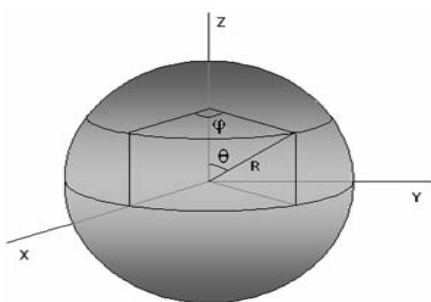
d) $\vec{A} = -7.5\vec{a}_y + 3\vec{a}_z$

Coordenadas esféricas

En el sistema de coordenadas esféricas se utilizan también tres coordenadas para notar la posición de un punto o un vector en un espacio tridimensional, dos de estas coordenadas son angulares y una de ellas es métrica.

Se utiliza la longitud de un vector (R) que une el origen de coordenadas con punto dado, el ángulo que este vector forma con el semieje z positivo (θ) y el ángulo que su proyección sobre el plano XY forma con el semieje X positivo (φ), tal como se muestra en la siguiente figura 8.

Los ángulos θ y φ toman los nombres de ángulo polar y ángulo azimutal respectivamente.



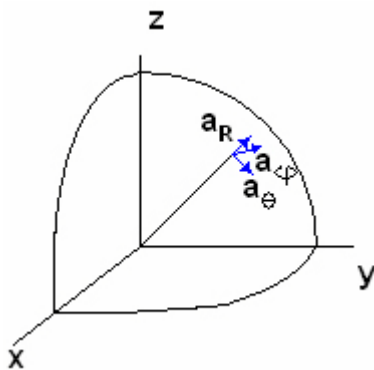
Sistema de coordenadas esféricas.

En este sistema de coordenadas al igual que en los anteriores, existen tres vectores directores que permiten indicar la dirección de un vector y que se muestran en la siguiente figura 9 .

Un vector en coordenadas esféricas queda definido por:

$$\vec{A} = A_R \vec{a}_R + A_\varphi \vec{a}_\varphi + A_\theta \vec{a}_\theta$$

Donde A_R es la proyección radial del vector con respecto al origen de coordenadas, A_φ es la componente angular medida con respecto al semieje x positivo proyectada sobre el plano XY y A_θ es la proyección en dirección de incremento del ángulo θ .



Vectores directores del sistema de coordenadas esféricas.

En el sistema de coordenadas esféricas, los productos vectoriales de los vectores directores también siguen una regla de rotación:

$$\begin{aligned} \vec{a}_R \times \vec{a}_\theta &= \vec{a}_\varphi \\ \vec{a}_\varphi \times \vec{a}_R &= \vec{a}_\theta \\ \vec{a}_\theta \times \vec{a}_\varphi &= \vec{a}_R \end{aligned}$$

Rotación en los productos vectoriales del sistema de coordenadas esféricas.

El vector posición de cualquier punto en coordenadas esféricas queda definido por:

$$\vec{X} = R \vec{a}_R \quad ; \quad \varphi = \varphi_0 \quad ; \quad \theta = \theta_0$$

En este sistema de coordenadas, la dirección de los tres vectores directores cambia de acuerdo con las coordenadas φ y θ , por lo que no se pueden

asumir como constantes en operaciones de derivación, integración o transformación de coordenadas que las involucren.

Para estos casos conviene también usar una matriz de transformación a coordenadas cartesianas, se muestra la matriz de transformación inversa.

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Sen } \theta \text{ Cos } \varphi & -\text{Sen } \varphi & \text{Cos } \theta \text{ Cos } \varphi \\ \text{Sen } \theta \text{ Sen } \varphi & \text{Cos } \varphi & \text{Cos } \theta \text{ Sen } \varphi \\ \text{Cos } \theta & 0 & -\text{Sen } \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

Matriz de transformación directa de coordenadas esféricas.

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Sen } \theta \text{ Cos } \varphi & \text{Sen } \theta \text{ Sen } \varphi & \text{Cos } \theta \\ -\text{Sen } \varphi & \text{Cos } \varphi & 0 \\ \text{Cos } \theta \text{ Cos } \varphi & \text{Cos } \theta \text{ Sen } \varphi & -\text{Sen } \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$x = R \text{ Sen } \theta \text{ Cos } \varphi$$

$$y = R \text{ Sen } \theta \text{ Sen } \varphi$$

$$z = R \text{ Cos } \theta$$

Matriz de transformación inversa de coordenadas esféricas.

Ejemplo 10 - Transformación de coordenadas cartesianas a esféricas

Dado un punto en cartesianas (-5,3,-4). Hallar las coordenadas esféricas que corresponden al punto dado.

Solución

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-5)^2 + (3)^2 + (-4)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{(-5)^2 + (3)^2}}{-4} \right) = 124^\circ$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{3}{-5} \right) = 149^\circ$$

Ejemplo 11 - Transformación de coordenadas esféricas a cartesianas

Expresar los vectores $\vec{a}_\theta$ y $\vec{a}_R$ en coordenadas cartesianas y calcule sus componentes para los ángulos. a) $\varphi = \pi/4$ $\theta = 2\pi/3$ b) $\varphi = 3\pi/4$ $\theta = 5\pi/6$

Solución

De la matriz de transformación se tiene:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Sen } \theta \text{ Cos } \varphi & -\text{Sen } \varphi & \text{Cos } \theta \text{ Cos } \varphi \\ \text{Sen } \theta \text{ Sen } \varphi & \text{Cos } \varphi & \text{Cos } \theta \text{ Sen } \varphi \\ \text{Cos } \theta & 0 & -\text{Sen } \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Sen } \theta \text{ Cos } \varphi \\ \text{Sen } \theta \text{ Sen } \varphi \\ \text{Cos } \theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}_R = \text{Sen } \theta \text{ Cos } \varphi \vec{a}_x + \text{Sen } \theta \text{ Sen } \varphi \vec{a}_y + \text{Cos } \theta \vec{a}_z$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Sen } \theta \text{ Cos } \varphi & -\text{Sen } \varphi & \text{Cos } \theta \text{ Cos } \varphi \\ \text{Sen } \theta \text{ Sen } \varphi & \text{Cos } \varphi & \text{Cos } \theta \text{ Sen } \varphi \\ \text{Cos } \theta & 0 & -\text{Sen } \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos } \theta \text{ Cos } \varphi \\ \text{Cos } \theta \text{ Sen } \varphi \\ -\text{Sen } \theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}_\theta = \text{Cos } \theta \text{ Cos } \varphi \vec{a}_x + \text{Cos } \theta \text{ Sen } \varphi \vec{a}_y - \text{Sen } \theta \vec{a}_z$$

Evaluando en los puntos dados:

$$\text{a) } \vec{a}_R = \text{Sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{Cos}\left(\frac{\pi}{4}\right) \vec{a}_x + \text{Sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{Sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \vec{a}_y + \text{Cos}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \vec{a}_z$$

$$\vec{a}_R = 0.6124 \vec{a}_x + 0.6124 \vec{a}_y - 0.5 \vec{a}_z$$

$$\vec{a}_\theta = \text{Cos}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{Cos}\left(\frac{\pi}{4}\right) \vec{a}_x + \text{Cos}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{Sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \vec{a}_y - \text{Sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \vec{a}_z$$

$$\vec{a}_\theta = -0.3536 \vec{a}_x - 0.3536 \vec{a}_y - 0.866 \vec{a}_z$$

$$\text{b) } \vec{a}_R = \text{Sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) \text{Cos}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \vec{a}_x + \text{Sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) \text{Sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \vec{a}_y + \text{Cos}\left(\frac{5\pi}{6}\right) \vec{a}_z$$

$$\vec{a}_R = -0.3556 \vec{a}_x + 0.3556 \vec{a}_y - 0.866 \vec{a}_z$$

$$\vec{a}_\theta = \text{Cos}\left(\frac{5\pi}{6}\right) \text{Cos}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \vec{a}_x + \text{Cos}\left(\frac{5\pi}{6}\right) \text{Sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \vec{a}_y - \text{Sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) \vec{a}_z$$

$$\vec{a}_\theta = 0.6124 \vec{a}_x - 0.6124 \vec{a}_y - 0.5 \vec{a}_z$$

Mediante una combinación se puede obtener una matriz de transformación directa y otra de transformación inversa entre los dos sistemas de coordenadas curvilíneas lo cual completa la totalidad de las transformaciones posibles entre los tres sistemas.

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Sen } \theta & \text{Cos } \theta & 0 \\ \text{Cos } \theta & -\text{Sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{r}{z}\right) \quad \varphi = \varphi$$

Transformación de coordenadas esféricas a cilíndricas

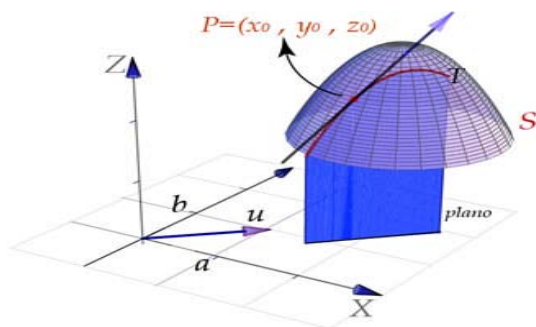
$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Sen } \theta & \text{Cos } \theta & 0 \\ \text{Cos } \theta & -\text{Sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

$$r = R \text{ Sen } \theta \quad z = R \text{ Cos } \theta \quad \varphi = \varphi$$

Matriz de transformación inversa de coordenadas cilíndricas a esféricas.

4.10 Derivada direccional, gradiente divergencia y rotacional.

Suponga que deseamos calcular la tasa de cambio de z en el punto (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario arbitrario $\vec{u} = (a, b)$. Para esto consideramos la superficie S con ecuación $z = f(x, y)$ (la gráfica de f) y sea $z_0 = f(x_0, y_0)$. Entonces el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ está sobre S . El plano vertical que pasa por el punto P en la dirección del vector $\vec{u}$ interseca a la superficie S en la curva T . La pendiente de la recta tangente T a la curva T en el punto P es la tasa de cambio de z en la dirección de $\vec{u}$.

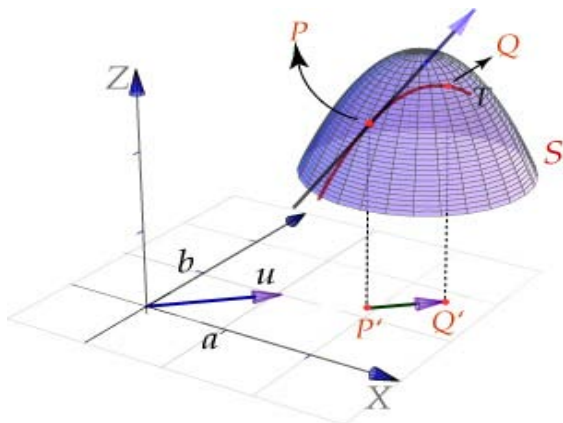


Derivada direccional en P en la dirección de u

Si $Q = (x, y, z)$ es otro punto sobre la curva T , y si P' y Q' son las proyecciones sobre el plano XY de los vectores P y Q , entonces el vector

$\overrightarrow{P'Q'}$

es paralelo al vector $\vec{u}$, y por consiguiente



Derivada direccional en P en la dirección de u

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\vec{u} = (ha, hb)$$

para algún escalar h . Así pues,

$$x - x_0 = ha \implies x = x_0 + ha$$

$$y - y_0 = hb \implies y = y_0 + hb$$

y la razón de cambio está dada por

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

y al tomar el límite cuando $h \rightarrow 0$ obtenemos la tasa de cambio instantánea de z (con respecto a la distancia) en la dirección de $\vec{u}$, la cual se llama derivada direccional de f en la dirección de $\vec{u}$.

Definición (derivada direccional)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar y sean $P = (x_0, y_0) \in D$ y $\vec{u} = (a, b)$ un vector unitario, entonces la derivada direccional de f en $P = (x_0, y_0)$ en la dirección del vector $\vec{u}$, está dada por :

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(P) &= D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + h\vec{u}) - f(P)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \end{aligned}$$

Definición (derivada direccional)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar y sean $P = (x_0, y_0) \in D$ y $\vec{u} = (a, b)$ un vector unitario, entonces la derivada direccional de f en $P = (x_0, y_0)$ en la dirección del vector $\vec{u}$, está dada por :

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(P) &= D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + h\vec{u}) - f(P)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \end{aligned}$$

Observación: al comparar la definición de derivada parcial con la de derivada direccional (1), podemos notar que si $\vec{u} = (1, 0)$ entonces $D_{\vec{u}} f(P) = f_x(P)$ y si $\vec{u} = (0, 1)$ $D_{\vec{u}} f(P) = f_y(P)$, es decir, las derivadas parciales son derivadas direccionales en la dirección de los vectores canónicos.

Ejemplo

Calcule la derivada direccional de $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ en el punto $P = (1, 1)$ en la dirección del vector $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

Solución

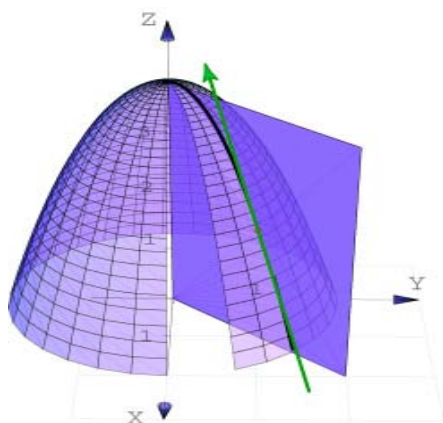
Usando la definición (1), tenemos que :

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(1, 1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - f(1, 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - \left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - \left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - 2\left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2}{h} \end{aligned}$$

y usando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4 \left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}}}{h} = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

Esto nos dice que la razón de cambio de z en P en la dirección del vector $\vec{u}$ es $-2\sqrt{2}$, es decir, que z en esta dirección está decreciendo.



derivada direccional en P en la dirección de u

Observación: la definición de derivada direccional es válida en general para funciones de n variables $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Con propósitos de cálculo, la definición no es muy útil, por lo que en general se usa la siguiente fórmula.

Teorema

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar diferenciable en D , entonces f tiene derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\vec{u} = (a, b)$ y

$$D_{\vec{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u} = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Observación: recuerde que la componente de $\vec{v}$ en la dirección de $\vec{u}$ es $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|}$, la cual es la longitud de la proyección vectorial de $\vec{v}$ sobre el vector

unitario $\vec{u} \left(\text{Proy}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} \vec{u} \right)$. Con lo cual la fórmula

$$D_{\vec{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u}$$

nos dice que la derivada direccional es la componente del vector gradiente $\nabla f(P)$ en la dirección del vector $\vec{u}$.

Ejemplo

Calcule la derivada direccional $D_{\vec{u}} f(x, y)$ si

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

y $\vec{u}$ es el vector unitario dado por $\theta = \frac{\pi}{6}$. ¿Cuánto es $D_{\vec{u}} f(1, 2)$?

Solución

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(x, y) &= f_x(x, y) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + f_y(x, y) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= (3x^2 - 3y) \frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y) \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} (3\sqrt{3}x^2 - 3\sqrt{3}y - 3x + 8y) \end{aligned}$$

De donde

$$D_{\vec{u}} f(1, 2) = \frac{1}{2} (-3\sqrt{3} + 13)$$

Ejemplo

Calcule la derivada direccional $D_{\vec{u}} f(x, y, z)$ si $f(x, y, z) = x \sin(yz)$ en el
vector $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. dirección

Solución

El vector gradiente de la función f está dado por

$$\nabla f(x, y, z) = (\sin(yz), xz \cos(yz), xy \cos(yz))$$

evaluando en P , tenemos que $\nabla f(1, 3, 0) = (0, 0, 3)$. Por otro lado un vector unitario en la dirección de $\vec{v}$ es:

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{6}} \vec{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Por tanto

$$D_{\vec{u}} f(1, 3, 0) = \nabla f(1, 3, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right) = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Suponga que tenemos una función f de dos o de tres variables y consideramos todas las posibles derivadas direccionales de f en un punto P dado. Esto proporciona las tasas de cambio de f en todas las posibles direcciones. De modo que podemos plantear la siguiente pregunta: ¿en cuál de estas direcciones f cambia con mayor velocidad?, y ¿cuál es la máxima razón de cambio? Las respuestas a estas preguntas las da el siguiente teorema.

Teorema (dirección de máximo cambio)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar. El valor máximo de la derivada direccional $D_{\vec{u}} f(x, y)$ es $|\nabla f(x, y)|$ y se presenta cuando $\vec{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(x, y)$.

Ejemplo

Suponga que la temperatura en un punto (x, y, z) en el espacio está dada por

$$T(x, y, z) = \frac{80}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2}$$

donde T está medida en grados centígrados y x, y, z están en metros. ¿En qué dirección aumenta más rápido la temperatura respecto al punto $(1, 1, -2)$? ¿Cuál es la máxima tasa de incremento?

Solución

El gradiente de T es

$$\nabla T(x, y, z) = -\frac{160x}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2} \vec{i} - \frac{320y}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2} \vec{j} - \frac{480z}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2} \vec{k}$$

Evaluando en el punto $P = (1, 1, -2)$ obtenemos

$$\nabla T(1, 1, -2) = \frac{5}{8}(-\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k})$$

Por tanto, respecto a $P = (1, 1, -2)$, la temperatura se incrementa con mayor rapidez en la dirección del vector gradiente

$$\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

La tasa máxima de incremento es la longitud del vector gradiente

$$|\nabla T(1, 1, -2)| = \frac{5}{8} |-\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}| = \frac{5\sqrt{41}}{8}$$

Observación: el valor mínimo de la derivada direccional es $-\|\nabla f(x, y)\|$ y ocurre cuando $\vec{u}$ tiene la dirección opuesta al gradiente $\nabla f(x, y)$.

Ejemplo

Considere la placa rectangular que se muestra en la figura siguiente. La temperatura en un punto (x, y) de la placa está dada por

$$T(x, y) = 5 + 2x^2 + y^2$$

Determine la dirección en la que se debe mover un insecto que está en el punto $(4, 2)$, para que se enfríe lo más rápido posible.

Solución

Para que el insecto se enfríe más rápidamente, respecto al punto $(4, 2)$, debe seguir una dirección opuesta al gradiente, es decir

$$\nabla T(x, y) = (-4x, -2y) \implies -\nabla T(4, 2) = (-16, -4)$$

$$\vec{v} = -16\vec{i} - 4\vec{j}$$

O sea debe ir en la dirección del vector .

Ejemplo

Considere el ejemplo anterior, observe que $(0, 0)$ es el punto más frío de la placa. Encuentre la trayectoria que el insecto (que busca el frío) debe seguir hacia el origen, partiendo del punto $(4, 2)$.

Solución

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

Si es la ecuación vectorial de la trayectoria
entonces

$$-\nabla f(x, y) = (x'(t), y'(t))$$

$$(-4x, -2y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

de donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x \\ \frac{dy}{dt} = -2y \end{cases}$$

y las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x(0) &= 4 \\ y(0) &= 2 \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales (3) se resuelve fácilmente integrando, pues cada ecuación diferencial es en variables separadas.

$$\begin{aligned} \ln(x) &= -4t + c_1 \\ \ln(y) &= -2t + c_2 \end{aligned}$$

y usando las condiciones iniciales (4) tenemos que

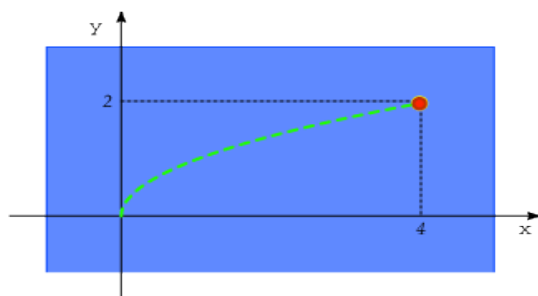
$$\begin{aligned} \ln(x) &= -4t - \ln(4) \\ \ln(y) &= -2t - \ln(2) \end{aligned}$$

simplificando

$$\ln\left(\frac{x}{4}\right) = -4t$$

$$\ln\left(\frac{y}{2}\right) = -2t$$

despejando obtenemos que la trayectoria que debe seguir el insecto es
 $y^2 = x$



mejor trayectoria

Ejemplo

La altura de una montaña, en metros sobre el nivel del mar, está dada por

$$z = 2000 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2}$$

Si un alpinista comienza su ascenso al nivel del mar en $x = 20\sqrt{10}$ y $y = 20\sqrt{5}$

¿Cuál es la trayectoria en el plano xy que corresponde a la ruta más empinada de ascenso a la montaña?

Solución

Sabemos que en cada punto de la montaña, la dirección de ascenso con mayor pendiente esta dada por el gradiente

$$\nabla z = \left(-\frac{x}{2}, -y\right)$$

Esto significa que este vector es tangente a la proyección de la trayectoria de ascenso en el plano xy , es decir, si $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ es dicha trayectoria, entonces

$$\vec{r}'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \left(-\frac{x}{2}, -y\right)$$

De donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = -y$$

Para resolverlo podemos observar que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

cuya solución es

$$\ln(y) = \ln(x) + c$$

$$y = cx^2$$

Y usando las condiciones iniciales $x(0) = 20\sqrt{10}$, $y(0) = 20\sqrt{5}$, la trayectoria

que debe seguir es

$$y = \frac{\sqrt{5}}{200}x^2$$

En la siguiente figura se muestra la curva de nivel $z = 0$ y la trayectoria

$$y = \frac{\sqrt{5}}{200}x^2$$

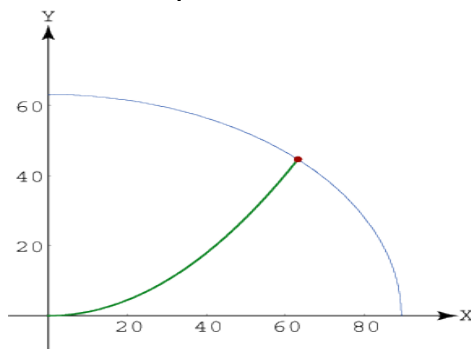


Figura 4: mejor trayectoria

Ejemplo

¿Cuál es la razón de cambio de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 4$ a lo largo de la curva

$$\vec{r}(t) = \frac{3}{2} \cos(\theta) \vec{i} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin(\theta) \right) \vec{j} + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \sin(\theta) \right) \vec{k}$$

en el punto que corresponde a $\theta = \frac{\pi}{4}$ (cuando decimos a lo largo de la curva, queremos dar a entender en la dirección del vector tangente a la curva.)

Solución

Primero, el punto en la curva es

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{3 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \vec{j} + \frac{3\sqrt{2} - 3}{2\sqrt{2}} \vec{k}$$

Un vector tangente a la curva está dado por

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{3}{2} \sin(\theta) \vec{i} + \frac{3}{2} \cos(\theta) \vec{j} - \frac{3}{2} \cos(\theta) \vec{k}$$

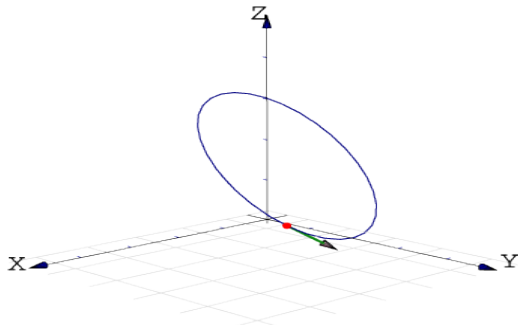
y por tanto un vector unitario tangente es

$$\vec{T}(\theta) = \frac{-\sin(\theta)}{\sqrt{1 + \cos^2(\theta)}} \vec{i} + \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1 + \cos^2(\theta)}} \vec{j} - \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1 + \cos^2(\theta)}} \vec{k}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Evaluando en

$$\vec{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{3}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j} - \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}$$



derivada direccional en P en la dirección de u

Por otro lado, el gradiente de f es

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 1)$$

Evaluando en P

$$\nabla f(P) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 1 \right)$$

Y así la derivada direccional es

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 1 \right) \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3} \right) = 0$$

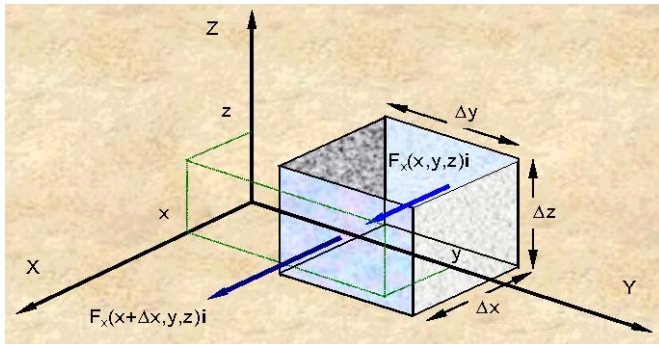
Divergencia.

Sea $\mathbf{F}$ una función vectorial de las variables x, y, z . La divergencia de $\mathbf{F}$ se define como:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \text{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

siendo F_x, F_y, F_z las componentes de $\mathbf{F}$. La divergencia de $\mathbf{F}$ es una función escalar (tal como se espera en un producto punto). Para tener una idea de lo que significa la divergencia de $\mathbf{F}$, consideremos que $\mathbf{F}$ es un campo de velocidad de un fluido y tomemos un pequeño elemento de volumen $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, como se ilustra en la figura 1. La derivada parcial de F_x respecto de x , de acuerdo a la definición (ec. 2), es una diferencia entre lo que sale en $x + \Delta x$ y lo que entra por la cara en x ; las otras dos componentes F_y y F_z no contribuyen en nada a esta diferencia entre estas caras del elemento de volumen. Análogamente, la derivada parcial de F_y respecto de y , indica una diferencia entre entrada y salida por las caras en y , y en $y + \Delta y$; y la derivada parcial de F_z respecto a z entre las caras en

z , y en $z + \Delta z$. Entonces la divergencia del campo de velocidad es una medida de como cambia $\mathbf{F}$ al volumen por unidad de tiempo y volumen (expansión y contracción). Es decir que la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}$ es una medida relativa de lo que entra y sale en un elemento de volumen.



Componente F_x de $\mathbf{F}$ en las caras en x y $x + \Delta x$, de elemento de volumen.

Rotacional.

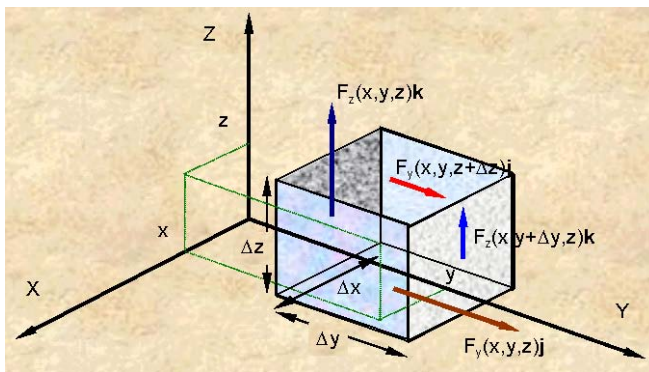


Figura 2. Componentes F_y y F_z de $\mathbf{F}$ en las caras en z y $z + \Delta z$, y las caras en y y $y + \Delta y$ de elemento de volumen, respectivamente.

Laplaciano e Identidades Vectoriales.

El operador diferencial puede ser utilizado en más de una ocasión sobre una función de varias variables. Una de estas formas corresponde a la divergencia del gradiente de la función conocida como el laplaciano de la función escalar f ,

$$\text{div}(\text{grad } f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f ;$$

o de un campo vectorial $\mathbf{F}$, aplicado a cada una de sus componentes,

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{F}) = \nabla^2 \mathbf{F} ;$$

siendo el operador laplaciano en coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Existe un conjunto de identidades de uso frecuente en el cálculo diferencial vectorial como las mostradas en la tabla I.

- 1) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
- 2) $\nabla(cf) = c\nabla f$
- 3) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
- 4) $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$
- 5) $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$
- 6) $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F})$
- 7) $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$
- 8) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$
- 9) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
- 10) $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f\nabla \times \mathbf{F} + (\nabla f) \times \mathbf{F}$
- 11) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}\nabla \cdot \mathbf{G} - \mathbf{G}\nabla \cdot \mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$
- 12) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$
- 13) $\nabla \times (\nabla f) = 0$
- 14) $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$
- 15) $\mathbf{H} \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{G} \times \mathbf{H})$
- 16) $\mathbf{F} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{H}) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{H})\mathbf{G} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})\mathbf{H}$

Tabla I. Identidades vectoriales, siendo f y g campos escalares y, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ campos vectoriales.

En particular, la identidad I.9 indica que si $\mathbf{G}$ es un campo vectorial para el que

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = 0,$$

entonces existe un campo vectorial $\mathbf{F}$ tal que $\mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{F}$.

El campo vectorial $\mathbf{G}$ es llamado solenoidal.

De igual manera, la identidad I.13 señala que si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial para el que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0},$$

entonces existe un campo escalar f , tal que

$$\mathbf{F} = \nabla f.$$

El campo vectorial $\mathbf{F}$ es llamado rotacional.

4.11 Aplicaciones geométricas y físicas de los operadores vectoriales.

CAMPOS ESCALARES

Dado un sistema cartesiano ortogonal, los puntos del espacio ó de una región del mismo quedan determinados conociendo el valor de sus coordenadas x , y , z .

Una función $\varphi(x,y,z)$ cuyo dominio sea la región considerada, se llama una **FUNCION DE PUNTO ESCALAR** pues asigna a cada punto del **DOMINIO** un **ESCALAR** que está representado por el valor que toma la función φ en el mismo.

A modo de ejemplo, supongamos que la función $\varphi(x,y,z) = 3x^2 + 2xy + yz^2$ esté definida en todo el espacio y analicemos que ocurre con φ en un punto determinado $P(1,2,1)$:
 $\varphi(1,2,1) = 3.1^2 + 2.1.2 + 2.1^2 = 9$ que representa el escalar de ese punto.

Esta función $\varphi(x,y,z)$ define un campo escalar dado que asigna o hace corresponder a cada punto un escalar.

Dada una FUNCION ESCALAR $\varphi(x,y,z)$ se llama **GRADIENTE** de la misma al VECTOR o SEUDOVECTOR cuyas componentes son las derivadas parciales φ_x , φ_y , φ_z .

El gradiente se simboliza con la notación : $\text{grad } \varphi$ o $\nabla \varphi$ $\therefore \text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \varphi_x \cdot i + \varphi_y \cdot j + \varphi_z \cdot k$

PROPIEDADES DEL GRADIENTE

Sea $F = \varphi \pm \psi$ una función escalar de dos funciones escalares φ , ψ luego

$$\text{grad } F = \nabla F = \nabla(\varphi \pm \psi) = F_x \cdot i + F_y \cdot j + F_z \cdot k$$

$$= (\varphi_x \pm \psi_x)i + (\varphi_y \pm \psi_y)j + (\varphi_z \pm \psi_z)k = \varphi_x \cdot i \pm \psi_x \cdot i + \varphi_y \cdot j \pm \psi_y \cdot j + \varphi_z \cdot k \pm \psi_z \cdot k$$

$$= (\varphi_x \cdot i + \varphi_y \cdot j + \varphi_z \cdot k) \pm (\psi_x \cdot i + \psi_y \cdot j + \psi_z \cdot k) = \text{grad } \varphi \pm \text{grad } \psi = \nabla \varphi \pm \nabla \psi$$

$$\text{luego: } \nabla(\varphi \pm \psi) = \nabla \varphi \pm \nabla \psi$$

Otra propiedad que es fácilmente demostrable $\nabla(\varphi \cdot \psi) = \varphi \cdot \nabla \psi + \psi \cdot \nabla \varphi$

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS

El incremento de la función $\varphi(x,y,z)$ al pasar del punto $P(x,y,z)$ al punto $P + dP$ de coordenadas $x + dx$; $y + dy$; $z + dz$ es: $d\varphi = \varphi_x \cdot dx + \varphi_y \cdot dy + \varphi_z \cdot dz$

Considerando a dP como el vector desplazamiento de componentes dx, dy, dz se puede expresar a $d\phi$ como $\nabla\phi \cdot dP$ o sea: $d\phi = (\phi_x \cdot i + \phi_y \cdot j + \phi_z \cdot k) \cdot (dx \cdot i + dy \cdot j + dz \cdot k)$

Si analizamos todos los desplazamientos posibles en cualquier dirección a partir de P y todos ellos de la misma longitud, o sea, con el mismo módulo $|dP|$, el producto escalar será máximo cuando las direcciones coincidan. De esto surge una importante propiedad geométrica del gradiente:

TEOREMA:

La dirección del vector gradiente de una función ϕ es aquella según la cual esta función varía más rápidamente.

El módulo del gradiente se puede obtener de:

$$|d\phi| = |\nabla\phi| \cdot |dP| \cdot \cos 0^\circ = |\nabla\phi| \cdot |dP| \quad \therefore \nabla\phi = \frac{|d\phi|}{|dP|}$$

O sea el módulo del gradiente es igual al cociente entre el módulo de la variación de ϕ en la dirección de máxima variación y el módulo del desplazamiento mismo, cuando ambos tienden a cero.

SUPERFICIES DE NIVEL

Se llaman superficies de nivel de una función $\phi(x,y,z)$ a las superficies de ecuación $\phi(x,y,z) = \text{constante}$ (En el caso de dos dimensiones tendremos curvas de nivel).

Consideremos un desplazamiento cualquiera dP de componentes dx, dy, dz sobre una superficie de nivel:

Como $\phi(x,y,z) = \text{constante}$ el $d\phi = 0$ o sea $d\phi = \phi_x \cdot dx + \phi_y \cdot dy + \phi_z \cdot dz = 0$
 $\therefore \nabla\phi \cdot dP = 0$

pero el producto escalar es nulo si los vectores son perpendiculares o sea que el **GRADIENTE** de ϕ es normal a cualquier desplazamiento sobre una superficie de nivel; De esta propiedad enunciamos el siguiente Teorema: “El vector gradiente es, en cada punto normal a la superficie de nivel que pasa por el punto”.

LINEAS DE GRADIENTE

Se llaman **LINEAS DE GRADIENTE** de un campo escalar ϕ a las que en cada punto tienen la tangente en la dirección del gradiente de ϕ . Esto significa que la

dirección del gradiente coincide en cada punto con la del desplazamiento sobre

la curva o sea $\frac{dx}{\varphi_x} = \frac{dy}{\varphi_y} = \frac{dz}{\varphi_z}$

CAMPOS VECTORIALES

Si se define un vector A por sus componentes a_i en una cierta región del espacio o en su totalidad; y si dichas componentes $a_i = f(x,y,z)$ son funciones de las coordenadas x, y, z es evidente que a cada punto de la región considerada le corresponderá un vector cuyas componentes serán funciones de las coordenadas del punto.

El conjunto de los mismos determinan un **CAMPO VECTORIAL**.

Dado un campo de vectores $A = a_1(x,y,z) i + a_2(x,y,z) j + a_3(x,y,z) k$, a las líneas que en cada punto son tangentes al vector del campo que pasa por el, se las llama **LINEAS DE CAMPO**.

Considerando un desplazamiento en la dirección de las líneas de campo o sea su vector tangente A ; y si el desplazamiento tiene por componentes dx, dy, dz ,

las ecuaciones diferenciales de las líneas de campo serán: $\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{a_3}$

DIVERGENCIA DE UN VECTOR

Se llama divergencia de un vector $A = a_1(x,y,z) i + a_2(x,y,z) j + a_3(x,y,z) k$, cuyas componentes a_i son funciones de (x,y,z) , al escalar dado por la suma de las derivadas de a_1 respecto de x más a_2 respecto de y más a_3 respecto de z o sea: $\text{div } A = a_{1x} + a_{2y} + a_{3z}$

De esta definición se deduce:

$\text{div } (A \pm B) = \text{div } A \pm \text{div } B$ luego $\text{div } (A \pm B) = (a_1 \pm b_1)_x + (a_2 \pm b_2)_y + (a_3 \pm b_3)_z$

$\text{div } (A \pm B) = a_{1x} \pm b_{1x} + a_{2y} \pm b_{2y} + a_{3z} \pm b_{3z} = \text{div } (A \pm B) = (a_{1x} + a_{2y} + a_{3z}) \pm (b_{1x} + b_{2y} + b_{3z}) = \text{div } A \pm \text{div } B$

$\text{div } (\varphi \cdot A) = \nabla \varphi \cdot A + \varphi \cdot \text{div } A$ donde $\varphi = \varphi(x,y,z)$ $A = a_1(x,y,z) i + a_2(x,y,z) j + a_3(x,y,z) k$

$\text{div } (\varphi \cdot A) = (\varphi \cdot a_1)_x + (\varphi \cdot a_2)_y + (\varphi \cdot a_3)_z = \text{div } (\varphi \cdot A) = (\varphi_x \cdot a_1 + \varphi \cdot a_{1x}) + (\varphi_y \cdot a_2 + \varphi \cdot a_{2y}) + (\varphi_z \cdot a_3 + \varphi \cdot a_{3z}) = \text{div } (\varphi \cdot A) = (\varphi_x \cdot a_1 + \varphi_y \cdot a_2 + \varphi_z \cdot a_3) + (\varphi \cdot a_{1x} + \varphi \cdot a_{2y} + \varphi \cdot a_{3z}) \therefore \text{div } (\varphi \cdot A) = \nabla \varphi \cdot A + \varphi \cdot \text{div } A$

INTERPRETACION FISICA DE LA DIVERGENCIA

Suponemos un fluido en movimiento y sea $A = a_1(x,y,z)i + a_2(x,y,z)j + a_3(x,y,z)k$ el vector velocidad del mismo en cada punto.

Es decir que A representa un **CAMPO DE VELOCIDADES**, cuyas componentes a_i son funciones derivables de x, y, z .

Consideramos un punto $P(x,y,z)$ y un paralelepípedo elemental que a partir de P tiene las aristas paralelas a los versores fundamentales i, j, k y de longitudes $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ respectivamente.

La cantidad de fluido que entrará al paralelepípedo por la cara normal al versor i (plano yz) por unidad de tiempo será: $a_1(x,y,z) \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ (componente de la velocidad por el área de la sección de entrada) y la cantidad que saldrá por la sección opuesta será: $a_1(x+\Delta x; y; z) \cdot \Delta y \cdot \Delta z$

Si $\Delta x \rightarrow 0$ la diferencia entre estas dos cantidades será:

$$a_1(x+\Delta x; y; z) \cdot \Delta y \cdot \Delta z - a_1(x,y,z) \cdot \Delta y \cdot \Delta z = a_{1x}(x,y,z) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

De igual manera las diferencias análogas para las otras caras serán: $a_{2y}(x,y,z) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$; $a_{3z}(x,y,z) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$.

O sea que la cantidad de fluido que por unidad de tiempo queda en el paralelepípedo elemental es: $a_{1x}(x,y,z) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z + a_{2y}(x,y,z) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z + a_{3z}(x,y,z) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = \text{div} A \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$

De aquí resulta que “La divergencia del vector A en el punto P es el cociente entre la cantidad de fluido que se crea por unidad de tiempo en el volumen elemental correspondiente al punto P y este volumen, cuando el mismo tiende a reducirse al punto P .”

Si la divergencia de A tiene signo negativo en vez de crearse fluido en P se ha consumido. En el primer caso se dice que en P hay una **FUENTE** y en el segundo un **DESAGÜE** o **SUMIDERO**.

EL ROTOR

Se llama **ROTOR** o **ROTACIONAL** de un vector A de componentes a_1, a_2, a_3 funciones de x, y, z al vector de componentes $(a_{3y} - a_{2z}); (a_{1z} - a_{3x}); (a_{2x} - a_{1y})$ o sea:

$$\text{rot } A = (a_{3y} - a_{2z}) i + (a_{1z} - a_{3x}) j + (a_{2x} - a_{1y}) k$$

$$\text{rot } A = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right] i + \left[\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right] j + \left[\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right] k$$

los productos simbólicos $\frac{\partial}{\partial x} a_1$; $\frac{\partial}{\partial y} a_3$. son las derivadas parciales respectivas a_{1x} ; a_{3y} etc.

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y}$$

De la definición se deduce: $\text{rot } (A \pm B) = \text{rot } A \pm \text{rot } B$

$\text{rot } (\varphi \cdot A) = \varphi \cdot \text{rot } A - A \wedge \nabla \varphi$ siendo $\varphi = \varphi(x,y,z)$

$$\text{rot } \varphi \cdot A = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi a_1 & \varphi a_2 & \varphi a_3 \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial \varphi a_3}{\partial y} - \frac{\partial \varphi a_2}{\partial z} \right] i + \left[\frac{\partial \varphi a_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi a_3}{\partial x} \right] j + \left[\frac{\partial \varphi a_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi a_1}{\partial y} \right] k$$

$$= (\varphi_y \cdot a_3 + \varphi \cdot a_{3y} - \varphi_z \cdot a_2 - \varphi \cdot a_{2z}) i + (\varphi_z \cdot a_1 + \varphi \cdot a_{1z} - \varphi_x \cdot a_3 - \varphi \cdot a_{3x}) j + (\varphi_x \cdot a_2 + \varphi \cdot a_{2x} - \varphi_y \cdot a_1 - \varphi \cdot a_{1y}) k =$$

$$= \varphi [(a_{3y} - a_{2z}) i + (a_{1z} - a_{3x}) j + (a_{2x} - a_{1y}) k] + [(\varphi_y \cdot a_3 - \varphi_z \cdot a_2) i + (\varphi_z \cdot a_1 - \varphi_x \cdot a_3) j + (\varphi_x \cdot a_2 - \varphi_y \cdot a_1) k] =$$

$$\varphi \cdot \text{rot } A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{vmatrix} = \varphi \cdot \text{rot } A - A \wedge \nabla \varphi$$

LINEAS DE ROTOR O TORBELLINO

Dado un **CAMPO VECTORIAL** A, el conjunto de los $\text{rot } A$ forma otro campo vectorial llamado **CAMPO DE ROTORES**, las líneas de los campos de rotores se llaman **LINEAS DE ROTORES O TORBELLINO**.

Sus ecuaciones se obtienen sustituyendo las componentes del vector en las líneas de campo por las componentes del rotor $\frac{dx}{a_{3y} - a_{2z}} = \frac{dy}{a_{1z} - a_{3x}} = \frac{dz}{a_{2x} - a_{1y}}$

∴

$$(a_{3y} - a_{2z}) \quad (a_{1z} - a_{3x}) \quad (a_{2x} - a_{1y})$$

EL OPERADOR NABLA

Si consideramos los símbolos $\frac{\partial}{\partial x}$; $\frac{\partial}{\partial y}$; $\frac{\partial}{\partial z}$ como las componentes de un

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

vector simbólico, el mismo se representa por ∇ (Nabla) es decir:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

Este operador puede combinarse con otros vectores mediante operaciones conocidas: Aplicando el operador Nabla a un escalar φ se tiene:

$$\nabla \varphi = \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right] \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \quad \nabla \varphi = \varphi_x \mathbf{i} + \varphi_y \mathbf{j} + \varphi_z \mathbf{k} = \text{grad } \varphi$$

Multiplicando escalarmente ∇ por un vector A de componentes a_1, a_2, a_3 funciones de x, y, z :

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = a_{1x} + a_{2y} + a_{3z} = \text{div} A$$

Si multiplicamos vectorialmente ∇ por A obtenemos:

$$\nabla \wedge A = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right] \mathbf{k} = \text{rot } A$$

EL LAPLACIANO

Se llama **LAPLACIANO** de una función escalar $\varphi(x,y,z)$ a la **función escalar** dada por la divergencia de su gradiente. Se representa por Δ ó ∇^2 o sea:

$$\Delta \varphi = \nabla^2 \varphi = \text{div. grad } \varphi = \text{div. } \nabla \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi \quad \Delta \varphi = \nabla^2 \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}$$

Las funciones que satisfacen $\Delta \varphi = 0$ se denominan **FUNCIONES ARMONICAS**.

De la definición de **LAPLACIANO** se deduce: $\Delta(\varphi \pm \psi) = \Delta \varphi \pm \Delta \psi$

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi \pm \psi) &= \nabla \cdot \nabla(\varphi \pm \psi) = \nabla \cdot (\varphi \cdot \nabla \psi + \psi \cdot \nabla \varphi) = \nabla(\varphi \cdot \nabla \psi) + \nabla(\psi \cdot \nabla \varphi) = \\ &= \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \cdot \nabla \cdot \nabla \psi + \nabla \psi \cdot \nabla \varphi + \psi \cdot \nabla \cdot \nabla \varphi = \varphi \cdot \Delta \psi + \psi \cdot \Delta \varphi + 2 \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \end{aligned}$$

EL LAPLACIANO DE UN VECTOR

Se llama **LAPLACIANO DE UN VECTOR**, al nuevo vector definido por el Gradiente de su Divergencia menos el Rotor de su rotor. Sea $A = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ $a_i = a_i(x,y,z) \rightarrow i = 1,3$

$$\Delta A = \text{grad} \cdot \text{div} A - \text{rot} \cdot \text{rot} A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla \wedge (\nabla \wedge A) = \nabla^2 A$$

$$\text{grad} \cdot \text{div} A = \text{grad} (a_{1x} + a_{2y} + a_{3z}) = (a_{1x} + a_{2y} + a_{3z})_x i + (a_{1x} + a_{2y} + a_{3z})_y j + (a_{1x} + a_{2y} + a_{3z})_z k$$

$$\therefore \text{grad} \cdot \text{div} A = (a_{1xx} + a_{2yx} + a_{3zx}) i + (a_{1xy} + a_{2yy} + a_{3zy}) j + (a_{1xz} + a_{2yz} + a_{3zz}) k$$

$$\text{rot} A = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right] i + \left[\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right] j + \left[\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right] k$$

$$\text{rot rot} A = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left[\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right] & \left[\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right] & \left[\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right] \end{bmatrix} =$$

$$= (a_{2xy} - a_{1yy} - a_{1zz} + a_{3xz}) i + (a_{3yz} - a_{2zz} - a_{2xx} + a_{1yx}) j + (a_{1zx} - a_{3xx} - a_{3yy} + a_{2yz}) k$$

DERIVACION DE VECTORES DERIVADAS DIRECCIONALES

Sea $V = V(x,y,z)$ un versor función de punto, es decir un vector de módulo unitario, cuyas componentes v_1 ; v_2 ; v_3 sean funciones de x ; y ; z .

Consideremos un punto $P(x,y,z)$ y el punto obtenido por un desplazamiento Δs en la dirección de V el cual será $P + \Delta P$; resulta luego $\Delta P = V \cdot \Delta s$ La función $\phi(x,y,z)$ al pasar del punto P al $P + \Delta P$ se habrá incrementado en $\Delta \phi = \phi(P + \Delta P) - \phi(P)$

Si consideramos el límite del cociente de este incremento sobre Δs cuando este último tiende a cero es precisamente la derivada direccional de ϕ según la dirección de V .

Dado que el límite $\Delta \phi \rightarrow d\phi$ y que este diferencial es: $d\phi = \nabla \phi \cdot dP = \nabla \phi \cdot V \cdot \Delta s$ por lo tanto:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\nabla \varphi \cdot \mathbf{V} \cdot \Delta s}{\Delta s} = \nabla \varphi \cdot \mathbf{V} \quad \text{o sea}$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{dV} = \nabla \varphi \cdot \mathbf{V}$$

siendo $\frac{d\varphi}{dV}$ una notación simbólica que indica la derivada de φ en la dirección $\mathbf{V}$.

dV

Vamos a introducir ahora una notación que nos permitirá calcular la derivada direccional de un vector. Consideremos al vector $\mathbf{A} = a_1 \cdot \mathbf{i} + a_2 \cdot \mathbf{j} + a_3 \cdot \mathbf{k}$ donde los $a_i(x,y,z)$ $i = 1$ a 3 y el versor $\mathbf{V} = v_1 \cdot \mathbf{i} + v_2 \cdot \mathbf{j} + v_3 \cdot \mathbf{k}$. Representaremos por $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{A}$ al vector cuyas componentes son

$$v_1 \cdot \frac{\partial a_i}{\partial x}, v_2 \cdot \frac{\partial a_i}{\partial y}, v_3 \cdot \frac{\partial a_i}{\partial z} \text{ para } i = 1..3$$

Si indicamos por A_x al vector cuyas

componentes son las derivadas parciales a_{1x}, a_{2x}, a_{3x} y con análogo significado utilizamos los vectores A_y, A_z podemos escribir $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{A} = v_1 A_x + v_2 A_y + v_3 A_z$. Con esta notación establecemos la siguiente definición: Se llama derivada direccional del vector $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z)$ según la dirección del versor $\mathbf{V}$, al vector:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dV} = (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

La interpretación de esta derivada direccional es la

misma que para el caso de una función escalar. La diferencia entre los valores de $\mathbf{A}$ en $P(x,y,z)$ y el punto desplazado en Δs según la dirección de $\mathbf{V}$ o sea en el punto $P + \Delta \mathbf{P} = P + \mathbf{V} \cdot \Delta s$ es: $\Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}(P + \mathbf{V} \cdot \Delta s) - \mathbf{A}(P)$

El cociente entre esta diferencia y Δs cuando $\Delta s \rightarrow 0$ tiende precisamente a la derivada direccional. En efecto: $\Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}(x + v_1 \Delta s; y + v_2 \Delta s; z + v_3 \Delta s) - \mathbf{A}(x,y,z)$

$$\Delta \mathbf{A} = A_x \cdot v_1 \Delta s + A_y \cdot v_2 \Delta s + A_z \cdot v_3 \Delta s + \xi_1 v_1 \Delta s + \xi_2 v_2 \Delta s + \xi_3 v_3 \Delta s$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta s} = A_x \cdot v_1 + A_y \cdot v_2 + A_z \cdot v_3 = (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

Podemos considerar

$$\mathbf{V} \cdot \nabla = v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} + v_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

siendo los v_i las componentes del vector $\mathbf{V}$ que son

directamente los cosenos directores

DERIVADA TOTAL Y PARCIAL DE UN ESCALAR O UN VECTOR RESPECTO AL TIEMPO

Supongamos una función de punto que dependa también del tiempo t o sea $\varphi = \varphi(x,y,z,t)$. Si además x, y, z también son funciones de t y si llamamos $\mathbf{V}$ al vector velocidad en donde:

$V = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k$ Indicando los puntos las derivadas respecto de t se tiene:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt} = \phi_x \cdot \dot{x} + \phi_y \cdot \dot{y} + \phi_z \cdot \dot{z} + \phi_t = \phi_t + V \cdot \nabla \phi$$

Si en vez de un escalar se tiene un vector $A = A(x,y,z,t)$ que también depende del tiempo t tendremos para la derivada respecto de t :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (V \cdot \nabla)A = \frac{\partial A}{\partial t} + v_1 A_x + v_2 A_y + v_3 A_z$$

Estas expresiones son las que ligán la **DERIVADA TOTAL** respecto de t de un escalar o un vector con la **DERIVA PARCIAL** respectiva.

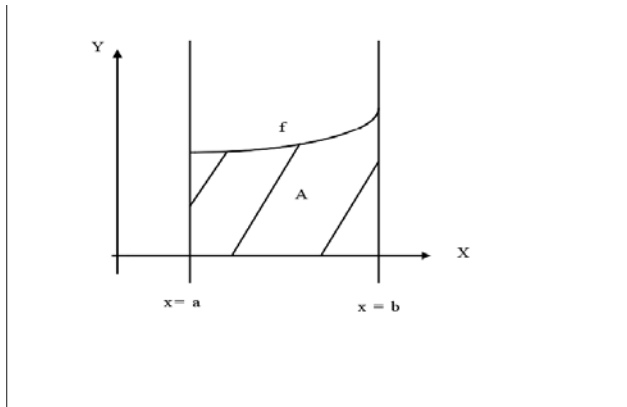
Integrales múltiples

5.1 Integrales iteradas.

Introducción.

En el primer curso de Fundamentos se planteó el problema de hallar el área comprendida entre la gráfica de una función positiva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$, $x = b$. Dicha área se representaba como:

$$\int_a^b f(x) dx$$

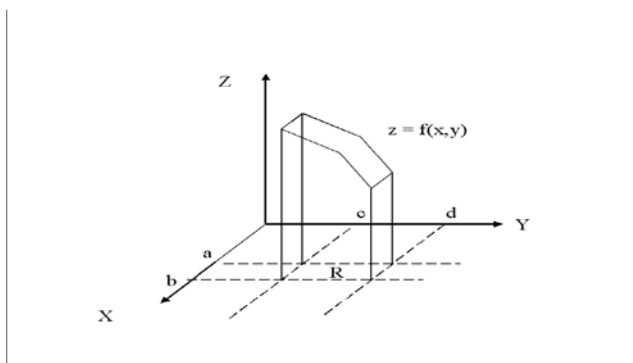


Vimos que este problema estaba relacionado con el cálculo de una primitiva de $f(x)$. El Teorema de Barrow nos asegura que si $F(x)$ es tal que $F'(x) = f(x)$ entonces, el área es igual a:

$$A = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

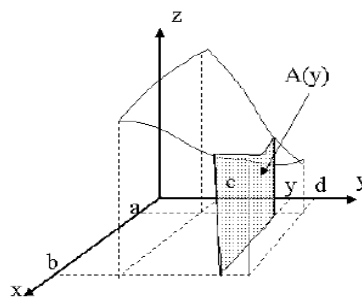
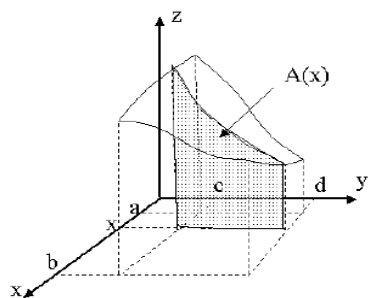
Nuestro problema es el cálculo del volumen de un prisma de base rectangular $R = [a, b] \times [c, d]$ y limitado superiormente por la gráfica de una función $z = f(x, y)$ positiva. A este volumen lo denotaremos por:

$$\int \int_R f(x, y) dx dy$$



Difiere del problema anterior en que no se resuelve encontrando una primitiva de $f(x, y)$ (no tiene sentido), sino por el cálculo de volúmenes por secciones.

El volumen vendrá dado por la suma infinita de las áreas de las secciones que se obtienen al cortar el cuerpo por planos paralelos al plano XZ, o también sumando las áreas de las infinitas secciones que se obtienen al cortar el cuerpo por planos paralelos al plano YZ.



$$V = \int \int_R f(x, y) dx dy = \int_c^d A(y) dy = \int_a^b A(x) dx$$

donde $A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, $A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ considerando en cada caso la x o la y fija.

$$\text{Así } V = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx .$$

El problema se convierte en el cálculo de una integral reiterada que ya sabemos resolver.

5.2 Definición de integral doble: Áreas y Volúmenes.

Definición de integral doble:

$$S_{nm} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(c_{ij}) \Delta x \Delta y$$

Sea

Si existe $\lim_{n, m \rightarrow \infty} S_{nm}$ y no depende de la elección de los valores c_{ij} , entonces se dice que f es integrable sobre R y al valor de dicho límite se le llama integral doble de $f(x, y)$ sobre R .

$$\int \int_R f(x, y) dx dy = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(c_{ij}) \Delta x \Delta y$$

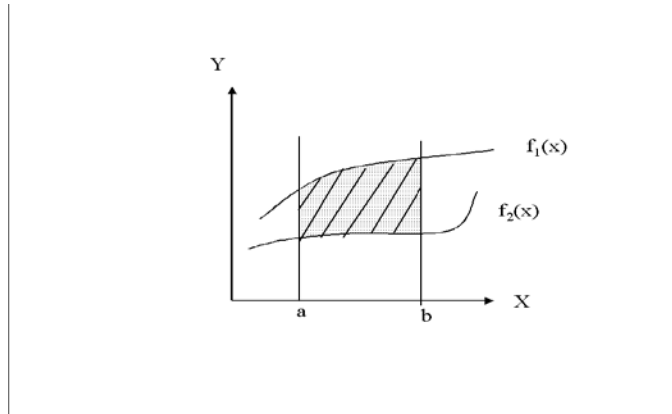
Si $f(x, y)$ es una función positiva, la integral representa el volumen del prisma

rectangular de base R y limitado superiormente por la gráfica de f . Si $f(x, y)$ es negativo, representa un volumen negativo.

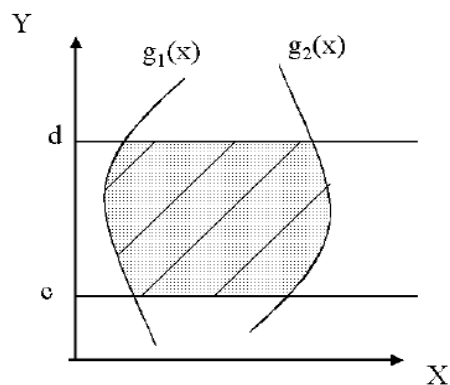
Integral doble sobre regiones más generales.

Vamos a definir la integral doble de funciones sobre los siguientes tipos de regiones:

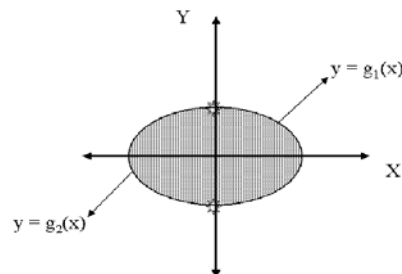
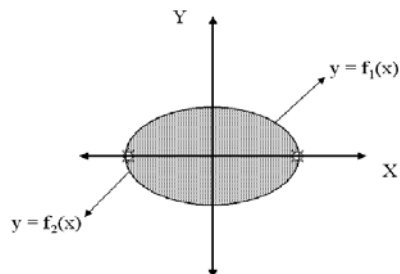
Regiones del tipo I $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$



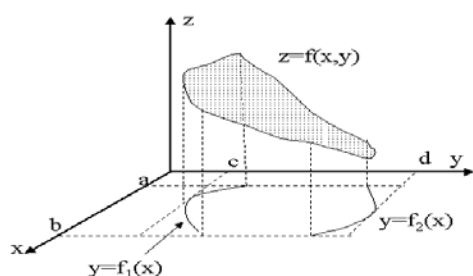
Regiones del tipo II $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$



Regiones del tipo III Son las que se pueden expresar indistintamente como regiones de tipo I o de tipo II.



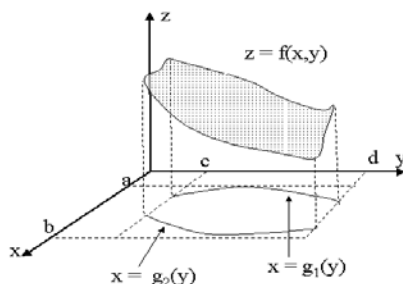
Definición: Sea D un región de tipo I, II ó III. Sea $z = f(x, y)$ una función continua. Consideremos una región de tipo I. Entonces:



$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Análogamente, en una región de tipo II, se tiene:

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$



Para las regiones del tipo III, se puede calcular la integral doble de $f(x, y)$ indistintamente como una región del tipo I ó II. A veces la integral se complica y hay que elegir la forma adecuada.

Consecuencia: Si D es una región acotada de $\mathbb{R}^2$, entonces el volumen del prisma de base D y altura 1 es:

$$\int \int_D dx dy = [\text{la función a integrar es } f(x, y) = 1] = A(D)$$

Ejercicio Resuelve la integral doble

$$\int \int_D \exp(y^2) dy dx$$

donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$.

Solucion:

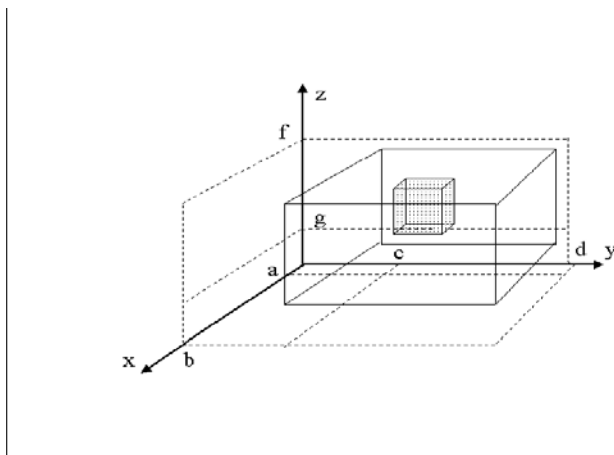
$$\int_0^1 \left(\int_x^1 \exp(y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^y \exp(y^2) dx \right) dy = \frac{1}{2}(e - 1)$$

Integral triple

En el caso de las integrales triples se siguen los mismos pasos que en las integrales dobles. Sea el paralelepípedo $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. Sea $f(x, y, z)$ una función continua sobre R .

$$\text{Definimos } S_{n,m,p} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{p-1} f(c_{ijk}) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\text{donde } x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} = \Delta x; \quad y_{j+1} - y_j = \frac{d-c}{m} = \Delta y; \quad z_{k+1} - z_k = \frac{f-e}{p} = \Delta z$$



$$c_{ijk} = (x_i^*, y_j^*, z_k^*) \text{ con } x_i^* \in [x_i, x_{i+1}], y_j^* \in [y_j, y_{j+1}], z_k^* \in [z_k, z_{k+1}]$$

Definición:

Si f es una función acotada y, existe el $\lim_{n,m,p \rightarrow \infty} S_{n,m,p}$ y no depende de la elección de los c_{ijk} , entonces se dice que f es integrable, y al valor de este límite se le llama integral triple sobre R , y se representa:

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz$$

Consecuencia: Si $f(x, y, z) = 1$, entonces

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = V$$

Representa el volumen.

Integrales triples sobre regiones más generales.

Se repite el mismo proceso que en las integrales dobles. Se consideran los siguientes tipos de regiones:

Tipo I: $a \leq x \leq b$, $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$, $g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)$ (paralelepípedo con paredes frontal y posterior rectas).

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Las regiones del tipo II son aquellas en las que $c \leq y \leq d$, (paralelepípedos con paredes izquierda y derecha planas).

Las regiones del tipo III son aquellas en las que $e \leq z \leq f$, (paralelepípedos con fondo y tapa planas).

Sus integrales triples se resuelven de manera análoga.

Las regiones del tipo IV son aquellas que se pueden expresar indistintamente como regiones de los tipos I, II o III.

Consecuencia: Si $f(x, y, z) = 1$ y W es una región acotada de $\mathbb{R}^3$, entonces:

$$\int \int \int_W dx dy dz = vol(W)$$

FUENTES DE INFORMACIÓN

1. Swokowski Earl. W. Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica.
2. Larson R. E. Y Hostetler R. P. Cálculo con Geometría Analítica. Ed. Mc. Graw Hill.
3. Zill Dennis G. Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica.
4. Leithold Louis. Cálculo con Geometría Analítica Ed. Oxford (7ª. Edición).
5. Marsden J. E. Y Tromba A. J. Cálculo Vectorial Ed. Addison-Wesley Iberoamericana
6. Murray R. Spiegel. Análisis Vectorial Ed. Mc. Graw Hill
7. Hwei P. Hsu Análisis Vectorial Ed. Addison-Wesley Iberoamericana
8. McCallum W. C. , Gleason A. M. Cálculo de Varias Variables Ed. CECSA
9. Thomas G. B. y Finney R. L. Cálculo. Varias Variables Ed. Addison-Wesley (Pearson Educación)
10. Stewart James Cálculo. Multivariable Ed. Thomson – Learning
11. Smith R. T. y Minton R. B. Cálculo (tomo 2) Mc Graw Hill
12. Derive (Software).