GOBIERNO DEL

ESTADO DE MÉXICO

TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL

ORIENTE DEL ESTADO DE MÉXICO

DIVISIÓN DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

ELABORACIÓN DE CUADERNILLO DE APUNTES:

FISICA 1

ELABORADO POR:

ING. ROSALÍO MARTÍN MARÍN FERNÁNDEZ

LOS REYES, LA PAZ, ESTADO DE MÉXICO 2009.

TECNOLOGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL
ORIENTE DEL ESTADO DE MÉXICO

CUADERNILLO DE APUNTES

FISICA 1

AUTOR:

ING. ROSALÍO MARTÍN MARÍN FERNÁNDEZ

LOS REYES, LA PAZ, ESTADO DE MÉXICO. 2009

ÍNDICE

OBJETIVO DE LA MATERIA: Aplicará las leyes y principios fundamentales de la mecánica a la solución de los problemas prácticos y adquirirá bases para cursos posteriores

OBJETIVO DE LA UNIDAD: Aplicará las leyes que explican el movimiento de los cuerpos utilizando los modelos de partícula y cuerpo rígido en la solución de problemas de ingeniería

INTRODUCCIÓN

Estos apuntes de física 1 fueron elaborados para recopilar información que le sirva al estudiante de las ingenierías a resolver problemas donde se aplique la cinemática de las partículas, concluyendo y especificando que al hablar de partícula no nos referimos a un sistema micro o pequeño sino a una gama mas completa que incluya todos los ejemplos.

También se considero el estudio de la cinética el cual incluyen las leyes de newton que son muy importantes para las aplicaciones del movimiento de los cuerpos y que al ingeniero le es de mucha aplicación para entender los fenómenos de cualquier cuerpo en movimiento.

Se considero además de los movimientos que desarrolla un cuerpo, el trabajo, la energía en todos sus géneros ya que no solo se desarrolla trabajo en un cuerpo, sino que dicho cuerpo forma un universo que concluye en un sistema llamado maquina.

Se adiciona otro tema muy importante, ya que no solo son sistemas en movimiento sino que también se deben de estudiar aquello sistemas que este en estado estático, que se encuentren en equilibrio ya que estos sistemas complementan aquellos que se encuentren en movimiento formando un todo en equilibrio que es muy importante para la aplicación de cualquier sistema en el área industrial ya que como se sabe cualquier industria necesita para su desarrollo de maquinas para transformar cualquier tipo de materia en mercancía que facilite la vida de los seres humanos.

Con estos apuntes tratamos que se vea que tan maravilloso es el mundo de la física y que tantas aplicaciones como ingenieros debemos de conocer para tener un amplio conocimiento de los fenómenos que día a día nos enfrentamos y los tratemos primero de comprender y posteriormente los tratemos de resolver para el desarrollo de nuestro perfil profesional.

Unidad 1

Cinemática de la partícula y del cuerpo rígido

Objetivo Educacional:

Aplicará las leyes que explican el movimiento de los cuerpos utilizando los modelos de partícula y cuerpo rígido en la solución de problemas de ingeniería.

UNIDAD 1

CINEMATICA DE LA PARTICULA Y DEL CUERPO RÍGIDO

Introducción.

La dinámica se divide en dos partes:

a.- Cinemática, que estudia la geometría del movimiento; se aplica para relacionar el desplazamiento, la velocidad, la aceleración y el tiempo, sin tener en cuenta las causas del movimiento.

b.- Cinética, que estudia la relación existente entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, la masa del cuerpo y el movimiento del mismo; la cinética permite predecir el movimiento debido a las fuerzas que actúan o determinar las fuerzas necesarias para producir un determinado movimiento

En la cinemática de partículas, la palabra partícula no implica que restrinjamos nuestro estudio a corpúsculos pequeños, lo cual indica más bien que estudiaremos el movimiento de cuerpos posiblemente tan grandes como automóviles, cohetes o aviones, sin tener en cuenta su tamaño.

Al decir que los cuerpos se consideran como partículas, queremos significar que solo se tienen en cuenta sus movimientos como un todo, despreciando cualquier rotación alrededor de su centro de masa.

Sin embargo, hay casos en los que tal rotación no es despreciable y entonces los cuerpos no se pueden considerar como partículas.

Debido a la tendencia marcada entre los ingenieros para adoptar el sistema internacional de unidades (unidades métricas SI), las unidades SI que se utilizan con mayor frecuencia en Cinemática, se introducen en el primer capítulo, ya que convertir valores de un sistema a otro no solo es usar factores de conversión.

Como el sistema de unidades SI es un sistema absoluto de unidades basado en las unidades de tiempo, longitud y masa, mientras que el sistema de unidades SU es un sistema gravitacional basado en las unidades de tiempo, longitud y fuerza, resulta obvia la necesidad de diferentes enfoques para la solución de muchos problemas.

Por ejemplo, cuando se usan las unidades SI, generalmente un cuerpo es caracterizado por su masa expresada en kilogramos; en la mayoría de los problemas de estática deberá determinarse el peso del cuerpo en newton, por lo cual será necesario realizar un cálculo adicional.

Por otra parte, cuando se usan las unidades SU, un cuerpo se caracteriza por su peso en libras y en los problemas de dinámica, será necesario realizar un cálculo adicional para obtener la masa en slug (lb.s2/p).

1.1.1. Sistema Internacional de Unidades

El *Sistema Internacional de Unidades*, abreviado **SI**, también denominado *Sistema Internacional de Medidas*, es el nombre que recibe el sistema de unidades que se usa en la mayoría de los países y es la forma actual del sistema métrico decimal. El SI también es conocido como *sistema métrico*, especialmente en las naciones en las que aún no se ha implantado para su uso cotidiano. Fue creado en 1960 por la Conferencia General de Pesos y Medidas, que inicialmente definió seis unidades físicas básicas. En 1971, fue añadida la séptima unidad básica, el mol.

Una de las principales características, que constituye la gran ventaja del SI, es que sus unidades están basadas en fenómenos físicos fundamentales. La única excepción es la unidad de la magnitud masa, el kilogramo, que está definida como *la masa del prototipo internacional del kilogramo* o aquel cilindro de platino e iridio almacenado en una caja fuerte de la Oficina Internacional de Pesos y Medidas.

Las unidades del SI son la referencia internacional de las indicaciones de los instrumentos de medida y a las que están referidas a través de una cadena ininterrumpida de calibraciones o comparaciones. Esto permite alcanzar la equivalencia de las medidas realizadas por instrumentos similares, utilizados y calibrados en lugares apartados y por ende asegurar, sin la necesidad de ensayos y mediciones duplicadas, el cumplimiento de las características de los objetos que circulan en el comercio internacional y su intercambiabilidad.

Existe una clasificación del Sistema Internacional de Unidades en:

a) Unidades Básicas
b) Unidades Derivadas.

a) Unidades básicas del Sistema Internacional de Unidades.

El Sistema Internacional de Unidades consta de siete unidades básicas (este es el nombre dado en la norma, aunque a veces también se las denomina inapropiadamente *unidades fundamentales*). Son las unidades utilizadas para expresar las magnitudes físicas definidas como básicas, a partir de las cuales se definen las demás como se muestra en la siguiente tabla:

Magnitud física básica	**Unidad básica**	**Símbolo**	**Observaciones**
Longitud	metro	m	Se define en función de la velocidad de la luz
Tiempo	segundo	s	Se define en función del tiempo atómico
Masa	kilogramo	kg	Es la masa del "cilindro patrón" custodiado en Sevres, Francia.
Intensidad de corriente eléctrica	amperio o ampere	A	Se define a partir de la fuerza magnética
Temperatura	kelvin	K	Se define a partir de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.

Cantidad de sustancia	mol	mol	Véase también Número de Avogadro
Intensidad luminosa	candela	cd	Véase también conceptos relacionados: Lumen, Lux e Iluminación física.

Las unidades básicas tienen múltiplos y submúltiplos, que se expresan mediante prefijos. Así, por ejemplo, la expresión *kilo* indica "mil" y, por lo tanto, 1 km son 1000 m, del mismo modo que *mili* indica "milésima" y, por ejemplo, 1 mA es 0,001 A.

Nota informativa sobre el kilogramo:

Es la única unidad básica con un prefijo multiplicativo, lo que induce a error, pues se puede interpretar que la unidad básica es el gramo. Es también la única unidad que se sigue definiendo en términos de un objeto patrón, por las dificultades que presenta definirlo mediante un experimento, de modo semejante a como se hace en las demás, aunque se han propuesto varios métodos.

Definiciones de las unidades básicas:

- *Kelvin (K). Unidad de temperatura termodinámica.*

  Definición: Un kelvin es la temperatura termodinámica correspondiente a la fracción 1/273,16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.

- *Segundo (s). Unidad de tiempo.*

  Definición: El segundo es la duración de 9 192 631 770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

- *Metro (m). Unidad de longitud.*

  Definición: Un metro es la longitud de trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un tiempo de 1/299 792 458 de segundo.

- *Kilogramo (kg). Unidad de masa.*

  Definición: Un kilogramo es una masa igual a la almacenada en un prototipo.

- *Amperio (A). Unidad de intensidad de corriente eléctrica.*

  Definición: Un amperio es la intensidad de una corriente constante que manteniéndose en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y situados a una distancia de un metro uno de otro en el vacío, produciría una fuerza igual a $2 \cdot 10^{-7}$ newton por metro de longitud.

- *Mol (mol). Unidad de cantidad de sustancia.*

  Definición: Un mol es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0,012 kilogramos de carbono 12. Cuando se emplea el mol, es necesario especificar las unidades elementales, que pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones u otras partículas o grupos especificados de tales partículas.

- *Candela (cd). Unidad de intensidad luminosa.*

  Definición: Una candela es la intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia $540 \cdot 10^{12}$ hercios y cuya intensidad energética en dicha dirección es 1/683 vatios por estereorradián.

Unidades derivadas del Sistema Internacional de Unidades.

Con esta denominación se hace referencia a las unidades utilizadas para expresar magnitudes físicas que son resultado de combinar magnitudes físicas tomadas como básicas.

El concepto no debe confundirse con los múltiplos y submúltiplos, los que son utilizados tanto en las unidades básicas como en las unidades derivadas, sino que debe relacionarse siempre a las magnitudes que se expresan. Si estas son longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente eléctrica, temperatura, cantidad de sustancia o intensidad luminosa, se trata de una magnitud básica, y todas las demás son derivadas.

Ejemplos de unidades derivadas

- Unidad de volumen, metro cubico, resultado de combinar tres veces la longitud, una de las magnitudes básicas.
- Unidad de densidad o cantidad de masa por unidad de volumen, resultado de combinar la masa (magnitud básica) con el volumen (magnitud derivada). Se expresa en kilogramos por metro cúbico y no tiene nombre especial.
- Unidad de fuerza, magnitud que se define a partir de la segunda ley de Newton (fuerza = masa × aceleración). La masa es una de las magnitudes básicas pero la aceleración es derivada. Por tanto, la unidad resultante ($kg \cdot m \cdot s^{-2}$) es derivada. Esta unidad derivada tiene nombre especial, newton. La unidad de energía, que por definición es la fuerza necesaria para mover un objeto en una distancia de un metro, es decir fuerza por distancia. Su nombre es el julio (unidad) y su símbolo es J. Por tanto, $J = N \cdot m$.

En cualquier caso, siempre es posible establecer una relación entre las unidades derivadas y las básicas mediante las correspondientes ecuaciones dimensionales.

Definiciones de algunas unidades derivadas con nombre especial:

- *Hercio (Hz). Unidad de frecuencia.*

  $$\mathrm{Hz} = \frac{1}{\mathrm{s}}$$

  Definición: Un hercio es un ciclo por cada segundo.

- *Newton (N). Unidad de fuerza.*

  $$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$$

  Definición: Un newton es la fuerza necesaria para proporcionar una aceleración de 1 m/s^2 a un objeto cuya masa es de 1 kg

- *Pascal (Pa). Unidad de presión.*

  $$\mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

  Definición: Un pascal es la presión que ejerce una fuerza de 1 newton sobre una superficie de 1 metro cuadrado normal a la misma

- *Julio o Joule (J). Unidad de energía, trabajo y calor.*

$$J = N \cdot m = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$$

Definición: Un joule es el trabajo producido por una fuerza de 1 newton, cuyo punto de aplicación se desplaza 1 metro en la dirección de la fuerza. En términos eléctricos, un joule es el trabajo realizado por una diferencia de potencial de 1 voltio y con una intensidad de 1 amperio durante un tiempo de 1 segundo.

- *Vatio o Wattio (W). Unidad de potencia.*

$$W = \frac{J}{s} = V \cdot A = \frac{m^2 \cdot kg}{s^3}$$

Definición: Un vatio es la potencia que da lugar a una producción de energía igual a 1 julio por segundo. En términos eléctricos, un vatio es la potencia producida por una diferencia de potencia (ddp) de 1 voltio o volts y una corriente eléctrica de 1amperio o amper.

- *Culombio o coulomb (C). Unidad de carga eléctrica.*

$$C = A \cdot s = F \cdot V$$

Definición: Un Culombio es la cantidad de electricidad transportada en un segundo por una corriente de un amperio de intensidad de corriente eléctrica.

- *Voltio (V). Unidad de potencial eléctrico y fuerza electromotriz.*

$$V = \frac{J}{C} = \frac{m^2 \cdot kg}{s^3 \cdot A}$$

Definición: la diferencia de potencial a lo largo de un conductor cuando una corriente eléctrica con una intensidad de corriente eléctrica de un amperio utiliza un watt de potencia eléctrica.

- *Ohmio (Ω). Unidad de la resistencia eléctrica.*

$$\Omega = \frac{V}{A} = \frac{m^2 \cdot kg}{s^3 \cdot A^2}$$

Definición: un ohmio es la resistencia eléctrica que existe entre dos puntos de un conductor cuando una diferencia de potencial constante de 1 voltio aplicada entre estos dos puntos produce, en dicho conductor, una corriente de intensidad 1 amperio, cuando no haya fuerza electromotriz en el conductor.

- *Siemens   (S). Unidad de la conductancia eléctrica.*

$$S = \frac{1}{\Omega}$$

Definición: Un siemens es la conductancia eléctrica que existe entre dos puntos de un conductor que tiene un ohmio de resistencia.

- *Faradio (F). Unidad de capacidad eléctrica.*

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{J}} = \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}} = \frac{\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{C}^2}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{s}^4 \cdot \mathrm{A}^2}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}}$$

Definición: Un faradio es la capacidad de un conductor con una diferencia de potencial de un voltio tiene como resultado una carga estática de un culombio.

- *Tesla (T). Unidad de flujo magnético y intensidad de campo magnético.*

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{A}}$$

Definición: Un tesla es una inducción magnética uniforme que, repartida normalmente sobre una superficie de un metro cuadrado, produce a través de esta superficie un flujo magnético total de un Weber.

- *Weber (Wb). Unidad de flujo magnético.*

$$\mathrm{Wb} = \mathrm{V} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2 = \frac{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{A}}$$

Definición: Un weber es el flujo magnético que al atravesar un circuito de una sola espira produce en la misma una fuerza electromotriz de 1 voltio si se anula dicho flujo en 1 segundo por decrecimiento uniforme.

- *Henrio o Henry (H). Unidad de inductancia.*

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{A}^2}$$

Definición: Un henrio es la inductancia de un circuito en el que una corriente que varía a razón de un amperio por segundo da como resultado una fuerza electromotriz auto inducida de un voltio.

- *Radián (rad). Unidad de Ángulo plano.*

$$\mathrm{rad} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}} = 1$$

Definición: Un radián es el ángulo que limita un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la circunferencia.

- *Estereorradián (sr). Unidad de ángulo sólido.*

  $$\mathrm{sr} = \mathrm{rad}^2 = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}^2} = 1$$

  Definición: Un estereorradián es el ángulo sólido que, teniendo su vértice en el centro de una esfera, intercepta sobre la superficie de dicha esfera un área igual a la de un cuadrado que tenga por lado el radio de la esfera

- *Lumen (lm). Unidad de flujo luminoso*

  $$\mathrm{lm} = \mathrm{cd} \cdot \mathrm{sr}$$

  Definición: Un lumen es el flujo luminoso producido por una candela de intensidad luminosa, repartida uniformemente en un estereorradián.

- *Lux (lx). Unidad de Iluminancia*

  $$\mathrm{lx} = \frac{\mathrm{cd} \cdot \mathrm{sr}}{\mathrm{m}^2}$$

  Definición: Un lux es la iluminancia producida por un lumen de flujo luminoso, en una superficie equivalente a la de un cuadrado de un metro de lado.

- *Becquerel (Bq). Unidad de actividad radiactiva*

  $$\mathrm{Bq} = \frac{1}{\mathrm{s}}$$

  Definición: Un Becquerel es una desintegración nuclear por segundo.

- *Gray (Gy). Unidad de Dosis de radiación absorbida.*

  $$\mathrm{Gy} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

  Definición: Un gray es la absorción de un joule de energía ionizante por un kilogramo de material irradiado.

- *Sievert (Sv). Unidad de Dosis de radiación absorbida equivalente*

  $$\mathrm{Sv} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

  Definición: Un sievert es la absorción de un joule de energía ionizante por un kilogramo de tejido vivo irradiado.

- *Katal (kat). Unidad de actividad catalítica*

$$\mathrm{kat} = \frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{s}}$$

Definición: Un katal es la actividad catalítica responsable de la transformación de un mol de compuesto por segundo

- *Grado Celsius (°C). Unidad de temperatura termodinámica.*

  Definición: $t/{}^{\circ}\mathrm{C} = T/\mathrm{K} - 273{,}15$, donde *t* es la temperatura en grados Celsius y *T* en kélvines.
  La magnitud de un grado Celsius (1 °C) es igual a la de un kelvin.

La conversión de grados Celsius a grados Fahrenheit se obtiene multiplicando la temperatura en Celsius por 1,8 (9/5) y sumando 32.

Unidades sin nombre especial de unidades derivadas:

- *Unidad de área.*

  m^2
  Definición: Es el área equivalente a la de un cuadrado de 1 metro de lado.

- *Unidad de volumen.*

  m^3
  Definición: Es el volumen equivalente al de un cubo de 1 metro de lado.

- *Unidad de velocidad o rapidez.*

  $$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
  Definición: Un metro por segundo es la velocidad de un cuerpo que, con movimiento uniforme, recorre una longitud de un metro en 1 segundo.

- *Unidad de aceleración.*

  $$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$
  Definición: Es el aumento de velocidad regular que sufre un objeto, equivalente a un metro por segundo cada segundo.

- *Unidad de número de onda.*

$$\frac{1}{\mathrm{m}}$$

Definición: Es el número de onda de una radiación monocromática cuya longitud de onda es igual a 1 metro.

- *Unidad de velocidad angular.*

$$\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Definición: Es la velocidad de un cuerpo que, con una rotación uniforme alrededor de un eje fijo, gira en 1 segundo, 1 radián.

- *Unidad de aceleración angular*.

$$\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2} = \frac{1}{\mathrm{s}^2}$$

Definición: Es la aceleración angular de un cuerpo animado de una rotación uniformemente variada alrededor de un eje fijo, cuya velocidad angular varía 1 radián por segundo, en 1 segundo.

- *Unidad de Momento de fuerza y torque*.

$$\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \frac{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$$

Definición: Es el torque producido cuando una fuerza de un newton actúa a un metro de distancia del eje fijo de un objeto, impulsando la rotación del mismo.

- *Unidad de viscosidad dinámica*

$$\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}}$$

Definición: Es la viscosidad dinámica de un fluido homogéneo, en el cual, el movimiento rectilíneo y uniforme de una superficie plana de 1 metro cuadrado, da lugar a una fuerza retardatriz de 1 newton, cuando hay una diferencia de velocidad de 1 metro por segundo entre dos planos paralelos separados por 1 metro de distancia.

- *Unidad de entropía*

$$\frac{J}{K} = \frac{m^2 * kg}{s^2 * K}$$

Definición: Es el aumento de entropía de un sistema que recibe una cantidad de calor de 1 julio, a la temperatura termodinámica constante de 1 kelvin, siempre que en el sistema no tenga lugar ninguna transformación irreversible.

- *Unidad de Calor específico o Capacidad calorífica*

  $$\frac{J}{kg * K} = \frac{m^2}{s^2 * K}$$

  Definición: Es la cantidad de calor, medida en julios, que, en un cuerpo homogéneo de una masa de 1 kilogramo, produce una elevación de temperatura termodinámica de 1 kelvin.

- *Unidad de conductividad térmica*

  $$\frac{W}{m * K} = \frac{m * kg}{s^3 * K}$$

  Definición: Es la conductividad térmica de un cuerpo homogéneo isótropo, en la que una diferencia de temperatura de 1 kelvin entre dos planos paralelos, de área 1 metro cuadrado y distantes 1 metro, produce entre estos planos un flujo térmico de 1 vatio.

- *Unidad de intensidad del campo eléctrico*.

  $$\frac{V}{m} = \frac{m * kg}{s^3 * A}$$

  Definición: Es la intensidad de un campo eléctrico, que ejerce una fuerza de 1 newton sobre un cuerpo cargado con una cantidad de electricidad de 1 culombio.

- *Unidad de rendimiento luminoso*.

  $$\frac{lm}{W} = \frac{cd * sr * s^3}{m^2 * kg} = \frac{cd * s^3}{m^2 * kg}$$

  Definición: Es el rendimiento luminoso obtenido de un artefacto que gasta un vatio de potencia y genera un lumen de flujo luminoso.

Normas ortográficas para los símbolos

Los símbolos de las unidades son entidades matemáticas y no abreviaturas, por lo que se deben escribir siempre tal cual están definidos (por ejemplo, «m» para metro y «A» para ampere o amperio). Deben usarse preferentemente los símbolos y no los nombres (por ejemplo, «kHz» y no «*kilohertz*» o «*kilohertzio*») y los símbolos no deben pluralizarse. Al contrario que los símbolos, los nombres no están normalizados internacionalmente, sino que dependen de la lengua; se consideran siempre nombres comunes. Pueden utilizarse las denominaciones castellanizadas de uso habitual, siempre que estén reconocidos por la Real Academia Española (ejemplos: amperio, culombio, faradio, voltio, vatio, etc.).

Los símbolos se escriben en minúsculas, salvo aquéllos cuyo nombre proceda de una persona (W, de Watt, V, de Volta). Asimismo los submúltiplos y los múltiplos hasta kilo (k) inclusive, también se escriben con minúscula; desde mega, se escriben con mayúscula. Se han de escribir en *letra redonda* independientemente del resto del texto. Esto permite diferenciarlos de las variables.

Los símbolos no cambian cuando se trata de varias unidades, es decir, no debe añadirse una "s". Tampoco debe situarse un punto (".") a continuación de un símbolo, salvo cuando el símbolo se encuentra al final de una frase. Por lo tanto, es incorrecto escribir, por ejemplo, el símbolo de kilogramos como «*Kg*» (con mayúscula), «*kgs*» (pluralizado) o «*kg.*» (con el punto). La única manera correcta de escribirlo es «kg». Esto se debe a que se quiere evitar que haya malas interpretaciones: «Kg», podría entenderse como kelvin·gramo, ya que «K» es el símbolo de la unidad de temperatura kelvin. Por otra parte, ésta última se escribe sin el símbolo de grados «°», pues su nombre correcto no es grado Kelvin (*°K*), sino sólo kelvin (K).

El símbolo de segundos es «s» (en minúscula y sin punto posterior) y no «*seg.*» ni «*segs.*». Los amperios no deben abreviarse «*Amps.*», ya que su símbolo es «A» (mayúscula y sin punto). El metro se simboliza con «m» (no «*mt*», ni «*mts.*»).

Legislación sobre el uso del SI.

El SI puede ser usado legalmente en cualquier país del mundo, incluso en aquellos que no lo han implantado. En muchos otros países su uso es obligatorio. En aquellos que utilizan todavía otros sistemas de unidades de medidas, como los Estados Unidos y el Reino Unido, se acostumbra indicar las unidades del SI junto a las propias, a efectos de conversión de unidades.

El SI fue adoptado por la undécima Conferencia General de Pesos y Medidas (CGPM o *Conférence Générale des Poids et Mesures*) en 1960.

En Argentina, el SI fue adoptado a través de la ley Nº 19.511, creada el 2 de marzo de 1972, conocida como Sistema Métrico Legal Argentino (SI.ME.LA.).

En Colombia el Sistema Internacional se hace obligatorio y oficial mediante el decreto Nº 1.731 de 1967 del MDE.

En Ecuador fue adoptado mediante la Ley Nº 1.456 de Pesas y Medidas y promulgada en el Registro Oficial Nº 468 del 9 de enero de 1974.

En España, en el Art. 149 (Título VIII) de la Constitución se atribuye al Estado la competencia exclusiva de legislar sobre pesos y medidas. La ley que desarrolla esta materia es la Ley 3/1985, del 18 de marzo, de Metrología.

En Uruguay entra en vigencia el uso obligatorio del SI a partir del 1 de enero de 1983 por medio de la ley 15.298.12345654 4

Tabla de múltiplos y submúltiplos.

Prefijos del SI

1000^n	10^n	Prefijo	Símbolo	Escala Corta	Escala Larga	Equivalencia Decimal en los Prefijos del SI	Asignación
1000^8	10^{24}	yotta	Y	Septillón	Cuadrillón	1 000 000 000 000 000 000 000 000	1991
1000^7	10^{21}	zetta	Z	Sextillón	Mil trillones	1 000 000 000 000 000 000 000	1991
1000^6	10^{18}	exa	E	Quintillón	Trillón	1 000 000 000 000 000 000	1975

1000^5	10^{15}	peta	P	Cuadrillón	Mil billones	1 000 000 000 000 000	1975
1000^4	10^{12}	tera	T	Trillón	Billón	1 000 000 000 000	1960
1000^3	10^9	giga	G	Billón	Mil millones (o millardo)	1 000 000 000	1960
1000^2	10^6	mega	M	Millón		1 000 000	1960
1000^1	10^3	kilo	k	Mil		1 000	1795
$1000^{2/3}$	10^2	hecto	h	Centena		100	1795
$1000^{1/3}$	10^1	deca	da / D	Decena		10	1795
1000^0	10^0	*ninguno*		Unidad		1	
$1000^{-1/3}$	10^{-1}	deci	d	Décimo		0.1	1795
$1000^{-2/3}$	10^{-2}	centi	c	Centésimo		0.01	1795
1000^{-1}	10^{-3}	mili	m	Milésimo		0.001	1795
1000^{-2}	10^{-6}	micro	µ	Millonésimo		0.000 001	1960
1000^{-3}	10^{-9}	nano	n	Billonésimo	Milmillonésimo	0.000 000	1960

						001	
1000^{-4}	10^{-12}	pico	p	Trillonésimo	Billonésimo	0.000 000 000 001	1960
1000^{-5}	10^{-15}	femto	f	Cuadrillonésimo	Milbillonésimo	0.000 000 000 000 001	1964
1000^{-6}	10^{-18}	atto	a	Quintillonésimo	Trillonésimo	0.000 000 000 000 000 001	1964
1000^{-7}	10^{-21}	zepto	z	Sextillonésimo	Miltrillonésimo	0.000 000 000 000 000 000 001	1991
1000^{-8}	10^{-24}	yocto	y	Septillonésimo	Cuadrillonésimo	0.000 000 000 000 000 000 000 001	1991

1.1.1. CONVERSION DE UNIDADES

CONVERSIONES

Ejercicios utilizando factores de conversiones.

a) UNIDADES FUNDAMENTALES DE MEDIDAS.

<u>PARA LONGITUDES</u>

1 Milla = 5280 Pies

1 Milla = 1.609347 Kilómetros

1 Kilómetros = 1000 Metros

1 Pie = 12 Pulgadas

1 Milla náutica = 1.852 Kilómetros

Ejemplo 1.- Expresar 3.78 Kilómetros a millas

Solución.- Se utiliza una regla de tres como a continuación se ilustra: Una milla es igual a 1.609 kilómetros, por lo tanto 3.78 Kilómetros a cuantas Millas "X" equivalen.

1 Milla = 1.609 Kilómetros

X Millas = 3.78 Kilómetros

Despejando el valor "X" de la ecuación se tiene la siguiente fórmula:

$$X \quad MILLAS = 3.78\,Kms\,\left(\frac{1\,MILLA}{1.609\,Kms}\right) = 2.34878\,MILLAS = 2.35\,MILLAS$$

Ejemplo 2.- Convertir 8.563 Millas a Pulgadas.

Solución.- Como en el caso anterior se debe hacer una regla de tres, en este ejercicio se pone el valor de la unidad y según convenga será en el lado del numerador o denominador para que por desarrollo del mismo problema se vayan eliminando unidades y solo queden las unidades buscadas como se muestra a continuación:

$$X \;\; PULG. = 8.563\,MILLAS\,\left(\frac{5280\,PIES}{1\,MILLA}\right)\left(\frac{12\,PULG.}{1\,PIE}\right) = 542551.68\,PULG.$$

PARA MASAS.

1 Kilogramo = 1000 gramos

1 miligramo = 0.001 Gramos

1 centigramo = O.O1 gramos

1 libra = 0.4535924 kilogramo

Ejemplo 3.- 1.5 libra a centigramos

Solución.- En este problema se observa primeramente como se coloca el valor de la libra en el numerador y la unidad en el denominador, en el paso siguiente el valor del kilogramo en gramos en el numerador y la unidad en el denominador de tal manera que se pueda eliminar las unidades que están arriba con las que están abajo y al final solo queden las unidades buscadas con sus respectivos cálculos matemáticos.

$$X\ cgs = 1.5\ LIBRA\,(\frac{O.45359\ Kg}{1\,LIBRA})(\frac{1000\ g}{1\,Kg})(\frac{1\,cg}{0.01\,g}) = 68038.86\,cg$$

TIEMPO

365 Días = 1 Año

1 Día = 24 Horas

1 Hora = 60 Minutos

1 Minuto = 60 Segundo

1 Microsegundo = 10^{-6} Segundo

Ejemplo 4.- 5.6 Días a Microsegundo

Solución.- Como en los casos anteriores, hay que ir acomodando los valores de las unidades correspondientes por regla de tres.

$$X\ MICROSEG. = 5.6\ DIAS\ (\frac{24\,h}{1\,DIA})(\frac{60\ MIN}{1\,h})(\frac{60\ SEG}{1\,MIN})(\frac{1\,MICSEG.}{0.0000001\,SEG}) =$$

= 4.8384 X 10^{11} MICSEGUNDO.

Utilización de conversión de unidades

El Mol, es la unidad básica del sistema SI, y se define, como la cantidad de sustancia que contiene tantas entidades elementales iguales, (Átomos, moléculas u otras partículas), como átomos hay en exactamente 12 gramos de Carbono 12. La cantidad en un número real que se determina mediante experimentación y se conoce como Numero de Avogadro, su valor experimental es aproximadamente 6.022 X 10^{23} entidades elementales.

PARA EL CALCULO DE UNIDADES DE ATOMOS.

Cada elemento que se encuentra en la tabla periódica tiene un número determinado de átomos y una masa especifica.

La siguiente expresión:

1 Mol O = 15.99 g O = 6.02 X 10^{23} Átomos de Oxigeno

Se lee:

U mol de oxigeno tiene una masa de 15.99 g/mol y contiene 6.02 X10^{23} átomos de oxigeno.

La parte sombreada (Átomos), se emplea, cuando nos referimos a cualquier elemento libre cuya masa la tomamos de la tabla periódica

1 Mol Cl = 35.45 g Cl = 6.02 X 10^{23} Átomos de cloro

1 Mol Na = 22.99 g Na = 6.02 X 10^{23} Átomos de Sodio.

y así sucesivamente es igual para todos los elementos que están en la tabla periódica.

PARA EL CALCULO DE UNIDADES DE MOLECULA.

Una molécula se compone de dos o más átomos de un mismo elemento o elementos diferentes que están unidos químicamente.

EJEMPLO: **O_2** Una molécula de Oxigeno tiene dos átomos de Oxigeno.

H_2O Una molécula de agua tiene dos átomos de Hidrogeno y un átomo de Oxigeno

Para trabajar con Moléculas de Oxigeno y hacer conversiones necesitamos saber:

Un mol de O_2 = 32.0 g/mol = 6.02 X 10^{23} Moléculas de O_2

Como estoy refiriéndome a dos átomos de oxigeno, su masa es 32.0 g. por tal razón debo usar la expresión moléculas al final del numero de Avogadro

Un mol de H_2SO_4 = 98.02 g/mol = 6.02 X 10^{23} Moléculas de acido sulfúrico. La cantidad, 98.02 g/mol es el peso molecular del compuesto

PARA EL CALCULO DE UNIDADES DE LOS IONES

Se plantea de igual forma que los anteriores solo que al final hay que señalar que son iones

Un mol de iones de Na^+ = 6.02 X 10^{23} Iones de Na^+ = 22.99 g de Na^+

EJERCICIOS:

Ejemplo 5.- ¿Cuántos moles de Hierro hay en 8.50 x 10^4 mg de hierro?

Factores de conversión:

1 g = 1000 mg

1 Mol de Fe = 55.85 g Fe

NOTA: La cantidad 55.85 g Fe, Es la masa molar del Hierro que se encuentra disponible en la tabla periódica.

$$X \; moles \; de \; Fe = 8.5 \, x \, 10^4 \; mg \; (\frac{1 \, g}{1000 \, mg})(\frac{1 \, mol \; Fe}{55.85 \, g \; Fe}) =$$

X =1.52 moles de Fe

Ejemplo 6.- ¿Cuántos gramos de cobre hay en 5.25 X 10^{22} Átomos de Cu?

Factores de conversión:

1 Mol de Cu = 6.022 X 10^{23} Átomos de Cu

1 Mol de Cu = 63.55 g Cu

$$X \; g \; Cu = 5.25 \; X \; 10^{22} \; ATOMOS \; Cu \; (\frac{1 \, mol \; Cu}{6.022 \; X \; 10^{23} \; atomos \; Cu})(\frac{63.55 \, g \; Cu}{1 \, mol \; Cu}) =$$

X g Cu = 5.54 g Cu

Ejemplo 7.- ¿Cuantos gramos de oxigeno hay en 1.5 X 10^{22} moléculas de H_3PO_4?

Factores de conversión:

1 Mol de O = 6.022 X 10^{23} Átomos de oxigeno

1 Mol de oxigeno = 15.99 g de oxigeno

4 Átomo de O = 1 Molécula de ácido fosfórico

(Se lee: Hay 4 átomos de oxigeno en una molécula de ácido fosfórico)

$$X\ g\ O = 1.5\ X\ 10^{22}\ moleculas\ H_3\ PO_4\ (\frac{4\ atomos\ O}{1\ molec\ H_3PO_4})(\frac{1\ mol\ O}{6.022\ X\ 10^{23}\ atomos\ O})$$

$$(\frac{15.99\ g\ O}{1\ mol\ O}) = 1.59\ g\ O$$

1.2. MOVIMIENTO RECTILINEO

Movimiento rectilíneo.

Un movimiento es **rectilíneo** cuando describe una trayectoria recta y **uniforme** cuando su velocidad es constante en el tiempo, es decir, su aceleración es nula. Esto implica que la velocidad media entre dos instantes cualesquiera siempre tendrá el mismo valor. Además la velocidad instantánea y media de este movimiento coincidirán.

La distancia recorrida se calcula multiplicando la velocidad por el tiempo transcurrido. Esta operación también puede ser utilizada si la trayectoria del cuerpo no es rectilínea, pero con la condición de que la velocidad sea constante.

Durante un movimiento rectilíneo uniforme también puede presentarse que la velocidad sea negativa. Por lo tanto el movimiento puede considerarse en dos sentidos, el positivo sería alejándose del punto de partida y el negativo sería regresando al punto de partida.

De acuerdo a la 1ª Ley de Newton toda partícula permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme cuando no hay una fuerza neta que actúe sobre el cuerpo.

Esta es una situación ideal, ya que siempre existen fuerzas que tienden a alterar el movimiento de las partículas. El movimiento es inherente que va relacionado y podemos decir que forma parte de la materia misma.

Ya que en realidad no podemos afirmar que algún objeto se encuentre en reposo total.

Se denomina movimiento rectilíneo, aquél cuya trayectoria es una línea recta.

En la recta situamos un origen O, donde estará un observador que medirá la posición del móvil x en el instante t. Las posiciones serán positivas si el móvil está a la derecha del origen y negativas si está a la izquierda del origen.

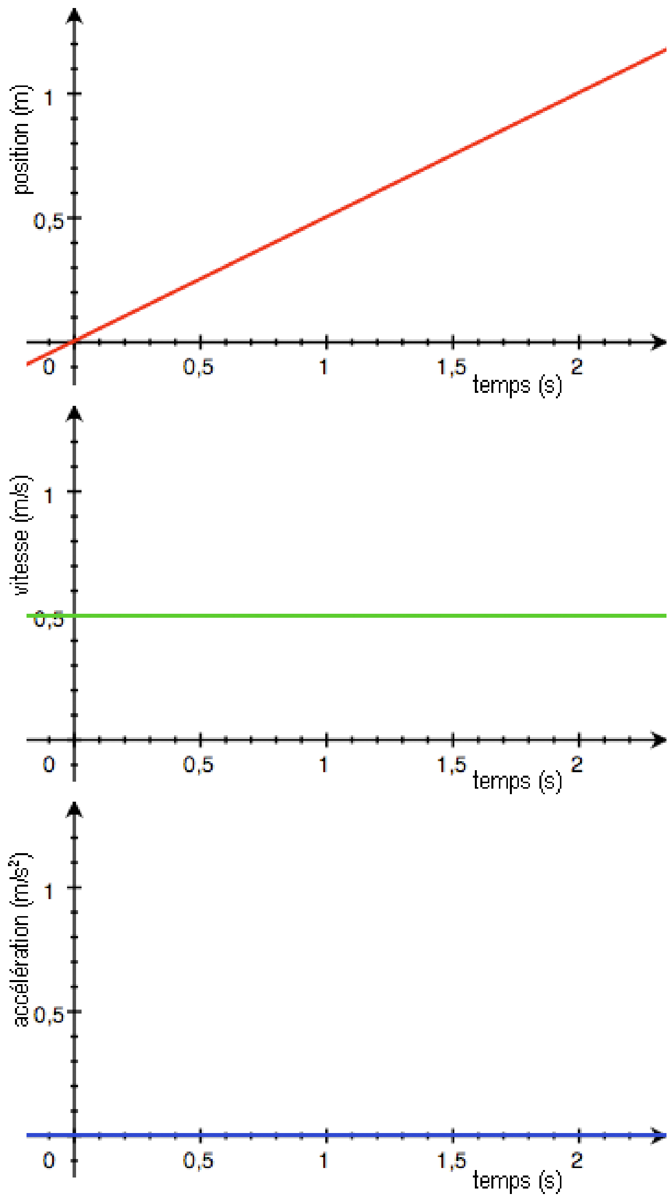


Figura 121. Que muestra como es el movimiento rectilíneo entre posición y tiempo, entre velocidad y tiempo y finalmente entre la aceleración y el tiempo en la cual esta última se representa vacía.

MOVIMIENTO RECTILINEO DE PARTICULAS

POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Una partícula que se mueve en línea recta se dice que está en movimiento rectilíneo.

En cualquier instante dado T, la partícula ocupara una determinada posición sobre la línea recta.

Para definir la posición P de la partícula tomamos un origen fijo O sobre la recta y una dirección positiva a lo largo de la línea.

Medimos la distancia X de O a P y la señalamos con un signo más o menos, según P se mueva con respecto a O a lo largo de la línea en la dirección positiva o negativa.

La distancia X, con el signo apropiado, define completamente la posición de la partícula; ésta de llama la COORDENADA DE POSICIÓN de la partícula considerada.

Por ejemplo, la coordenada de posición correspondiente a P en la figura 121-1 es igual a x = + 5 m, mientras que la correspondiente coordenada de P' en la figura 121-2 es x' = -2 m.

Cuando conocemos la coordenada de posición X en cualquier instante T, decimos que conocemos el movimiento de la partícula.

El itinerario del movimiento se puede expresar en forma de una ecuación en X y en T, tal como:

$X = 6\ T^2 – T^3$, o por medio de una gráfica de X en función de T como se indica en la figura 121-3.

Las unidades más usadas para medir la ordenada de posición X son, el metro (m) en el sistema de unidades SI y el pie (p) en el sistema de unidades SU de los países de habla inglesa.

Consideremos la posición P que ocupa una partícula en el tiempo T y la coordenada correspondiente X (figura 121-4). Consideremos también la posición P' que ocupa la partícula en un tiempo posterior $T + \Delta T$, la coordenada de posición T' se puede obtener sumando a la coordenada X de P el pequeño desplazamiento ΔX, el cual será positivo o negativo si P' se encuentra a la derecha o a la izquierda de P, respectivamente.

La velocidad media de la partícula para ese intervalo de tiempo ΔT, se define como el cociente entre el desplazamiento ΔX y el intervalo de tiempo ΔT.

Velocidad media = $\Delta X / \Delta T$

Si se usan las unidades SI, ΔX se expresa en metros y ΔT en segundos; y por tanto la velocidad media se expresará en metros por segundo (m/s).

Si se usan unidades SU, ΔX se expresa en pies y ΔT en segundos, y en consecuencia la velocidad media se expresa en pies por segundo (p/s).

La Velocidad instantánea V de la particula en el instante T se obtiene a partir de la velocidad media escogiendo intervalos de tiempo ΔT y desplazamientos ΔX cada vez más y más pequeños.

Velocidad instantánea = $V = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta X / \Delta T$

La velocidad instantánea se expresará también en m/s o e p/s. Observando que el límite de ese cociente es igual, por definición a la derivada de X con respecto a T; o sea:

$V = d_x / d_t$

La velocidad V se representa por un número algebraico el cual puede ser positivo o negativo.

Un valor positivo de V indica que X aumenta es decir que la partícula se mueve en dirección positiva, un valor negativo de V indica que X disminuye, es decir que la partícula se mueve en la dirección negativa.

La magnitud de V se suele llamar a veces LA RAPIDEZ de la partícula.

Consideremos la velocidad V de la particula en el instante T y también su velocidad $V + \Delta V$ en un instante posterior $T + \Delta T$.

La ACELERACIÓN MEDIA de la partícula en ese intervalo de tiempo ΔT se define como el cociente entre ΔV y ΔT.

Aceleración Media = $\Delta V / \Delta T$

Si se usan las unidades SI, ΔV se expresa en m/s y ΔT en segundos; la aceleración media se expresa en m/s^2. Si se usan unidades SU, ΔV se expresa en p/s y ΔT en segundos, la aceleración media se expresa en p/s^2.

La ACELERACIÓN INSTANTANEA de la partícula en el instante T se obtiene de la aceleración media tomando valores de ΔT y ΔV cada vez más y más pequeños.

Aceleración instantánea = a = $\lim_{\Delta T \to 0} \Delta V / \Delta T$

La aceleración instantánea también se expresara en m/s^2 o en p/s^2. El límite del cociente es, por definición, la derivada de V con respecto a T y mide la tasa de cambio de la velocidad. Escribimos por tanto:

$a = d_v / d_T$ o sustituyendo V $a = d^2X / dT^2$

La aceleración "a" se representa por un número algebraico que puede ser positivo o negativo. Un valor positivo de "a" indica que la velocidad aumenta. Esto quiere decir que la partícula se mueve más rápidamente en la dirección positiva o que se mueve más lentamente en la dirección negativa; en ambos casos, ΔV es positiva.

Un valor negativo de "a" indica que la velocidad disminuye, bien sea que la partícula se mueve más lentamente en la dirección positiva , o se mueva más rápidamente en la dirección negativa.

El termino deceleración (o desaceleración) se usa algunas veces para indicar que la rapidez de la partícula (o sea la magnitud de V) disminuye; la partícula se moverá entonces más lentamente.

Se puede obtener otra expresión de la aceleración eliminando la diferencial d_T en las ecuaciones anteriores. Despejando d_T obtenemos $d_t = d_x / V$ y tenemos:

$a = v\ d_v / d_x$

1.2 MOVIMIENTO RECTILINEO

Introducción al Movimiento rectilíneo.

Un movimiento es **rectilíneo** cuando describe una trayectoria recta y **uniforme** cuando su velocidad es constante en el tiempo, es decir, su aceleración es nula. Esto implica que la velocidad media entre dos instantes cualesquiera siempre tendrá el mismo valor. Además la velocidad instantánea y media de este movimiento coincidirán.

La distancia recorrida se calcula multiplicando la velocidad por el tiempo transcurrido. Esta operación también puede ser utilizada si la trayectoria del cuerpo no es rectilínea, pero con la condición de que la velocidad sea constante.

Durante un movimiento rectilíneo uniforme también puede presentarse que la velocidad sea negativa. Por lo tanto el movimiento puede considerarse en dos sentidos, el positivo sería alejándose del punto de partida y el negativo sería regresando al punto de partida.

De acuerdo a la 1ª Ley de Newton toda partícula permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme cuando no hay una fuerza neta que actúe sobre el cuerpo.

Esta es una situación ideal, ya que siempre existen fuerzas que tienden a alterar el movimiento de las partículas. El movimiento es inherente que va relacionado y podemos decir que forma parte de la materia misma.

Ya que en realidad no podemos afirmar que algún objeto se encuentre en reposo total.

Se denomina movimiento rectilíneo, aquél cuya trayectoria es una línea recta.

En la recta situamos un origen O, donde estará un observador que medirá la posición del móvil x en el instante t. Las posiciones serán positivas si el móvil está a la derecha del origen y negativas si está a la izquierda del origen.

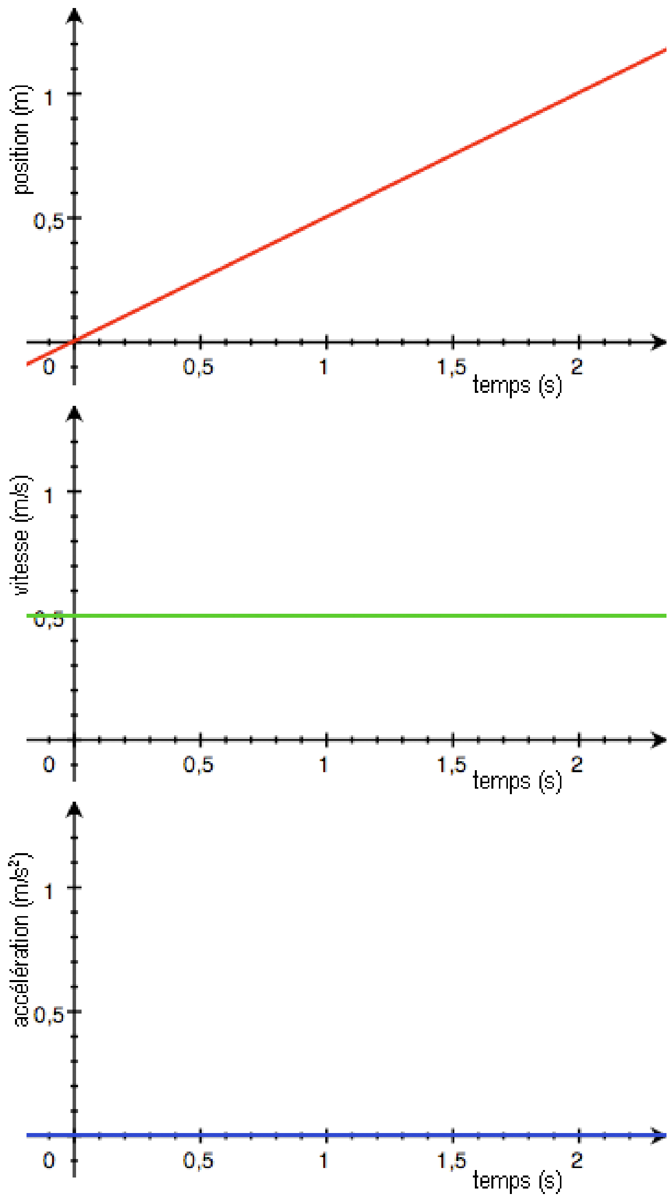


Figura 121. Que muestra como es el movimiento rectilíneo entre posición y tiempo, entre velocidad y tiempo y finalmente entre la aceleración y el tiempo en la cual esta última se representa vacía.

1.2.1 Desplazamiento, velocidad y aceleración (movimiento rectilíneo)

Una partícula que se mueve en línea recta se dice que está en movimiento rectilíneo.

En cualquier instante dado T, la partícula ocupara una determinada posición sobre la línea recta.

Para definir la posición P de la partícula tomamos un origen fijo O sobre la recta y una dirección positiva a lo largo de la línea.

Medimos la distancia X de O a P y la señalamos con un signo más o menos, según P se mueva con respecto a O a lo largo de la línea en la dirección positiva o negativa.

La distancia X, con el signo apropiado, define completamente la posición de la partícula; ésta de llama la COORDENADA DE POSICIÓN de la partícula considerada.

Por ejemplo, la coordenada de posición correspondiente a P en la figura 121-1 es igual a x = + 5 m, mientras que la correspondiente coordenada de P' en la figura 121-2 es x' = -2 m.

Cuando conocemos la coordenada de posición X en cualquier instante T, decimos que conocemos el movimiento de la partícula.

El itinerario del movimiento se puede expresar en forma de una ecuación en X y en T, tal como:

$X = 6\ T^2 – T^3$, o por medio de una gráfica de X en función de T como se indica en la figura 121-3.

Las unidades más usadas para medir la ordenada de posición X son, el metro (m) en el sistema de unidades SI y el pie (p) en el sistema de unidades SU de los países de habla inglesa.

Consideremos la posición P que ocupa una partícula en el tiempo T y la coordenada correspondiente X (figura 121-4). Consideremos también la posición P' que ocupa la partícula en un tiempo posterior T + ΔT, la coordenada de posición T' se puede obtener sumando a la coordenada X de P el pequeño desplazamiento ΔX, el cual será positivo o negativo si P' se encuentra a la derecha o a la izquierda de P, respectivamente.

La velocidad media de la partícula para ese intervalo de tiempo ΔT, se define como el cociente entre el desplazamiento ΔX y el intervalo de tiempo ΔT.

Velocidad media = $\Delta X / \Delta T$

Si se usan las unidades SI, ΔX se expresa en metros y ΔT en segundos; y por tanto la velocidad media se expresará en metros por segundo (m/s).

Si se usan unidades SU, ΔX se expresa en pies y ΔT en segundos, y en consecuencia la velocidad media se expresa en pies por segundo (p/s).

La Velocidad instantánea V de la partícula en el instante T se obtiene a partir de la velocidad media escogiendo intervalos de tiempo ΔT y desplazamientos ΔX cada vez más y más pequeños.

Velocidad instantánea = $V = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta X / \Delta T$

La velocidad instantánea se expresará también en m/s o e p/s. Observando que el límite de ese cociente es igual, por definición a la derivada de X con respecto a T; o sea:

$V = d_x / d_t$

La velocidad V se representa por un número algebraico el cual puede ser positivo o negativo.

Un valor positivo de V indica que X aumenta es decir que la partícula se mueve en dirección positiva, un valor negativo de V indica que X disminuye, es decir que la partícula se mueve en la dirección negativa.

La magnitud de V se suele llamar a veces LA RAPIDEZ de la partícula.

Consideremos la velocidad V de la partícula en el instante T y también su velocidad V + ΔV en un instante posterior T + ΔT.

La ACELERACIÓN MEDIA de la partícula en ese intervalo de tiempo ΔT se define como el cociente entre ΔV y ΔT.

Aceleración Media = $\Delta V / \Delta T$

Si se usan las unidades SI, ΔV se expresa en m/s y ΔT en segundos; la aceleración media se expresa en m/s^2. Si se usan unidades SU, ΔV se expresa en p/s y ΔT en segundos, la aceleración media se expresa en p/s^2.

La ACELERACIÓN INSTANTANEA de la partícula en el instante T se obtiene de la aceleración media tomando valores de ΔT y ΔV cada vez más y más pequeños.

Aceleración instantánea = a = $\lim_{\Delta T \to 0} \Delta V / \Delta T$

La aceleración instantánea también se expresara en m/s^2 o en p/s^2. El límite del cociente es, por definición, la derivada de V con respecto a T y mide la tasa de cambio de la velocidad. Escribimos por tanto:

$a = d_V / d_T$ o sustituyendo V $a = d^2X / dT^2$

La aceleración "a" se representa por un número algebraico que puede ser positivo o negativo. Un valor positivo de "a" indica que la velocidad aumenta. Esto quiere decir que la partícula se mueve más rápidamente en la dirección positiva o que se mueve más lentamente en la dirección negativa; en ambos casos, ΔV es positiva.

Un valor negativo de "a" indica que la velocidad disminuye, bien sea que la partícula se mueve más lentamente en la dirección positiva, o se mueva más rápidamente en la dirección negativa.

El termino deceleración (o desaceleración) se usa algunas veces para indicar que la rapidez de la partícula (o sea la magnitud de V) disminuye; la partícula se moverá entonces más lentamente.

Se puede obtener otra expresión de la aceleración eliminando la diferencial d_T en las ecuaciones anteriores. Despejando d_T obtenemos $d_t = d_x / V$ y tenemos:

$a = v \ d_v / d_x$

Ejemplo.- Consideremos una partícula que se mueve en línea recta y supongamos que su posición está definida por la ecuación

$$x = 6t^2 - t^3$$

Donde ***t*** se expresa en segundos y ***x*** en metros. La velocidad ***v*** en cualquier instante ***t*** se obtiene derivando ***x*** con respecto a ***t***.

$$v = dx \,/\, dt \quad = \quad 12t \;-\; 3t^3$$

La aceleración

1.2.2 MOVIMIENTO UNIFORME Y UNIFORMEMENTE ACELERADO

Movimiento rectilíneo

Se denomina movimiento rectilíneo, aquél cuya trayectoria es una línea recta.

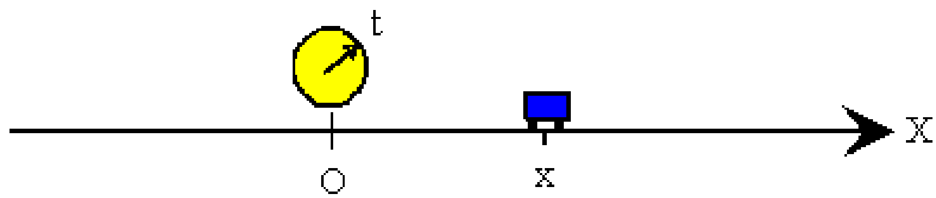


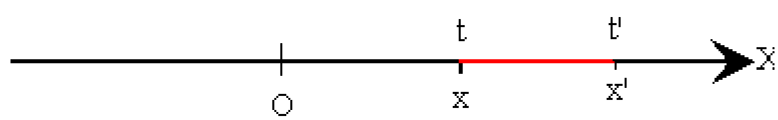
Figura 122-1 Movimiento rectilíneo de una partícula con respecto al tiempo.

En la recta situamos un origen O, donde estará un observador que medirá la posición del móvil *x* en el instante *t*. Las posiciones serán positivas si el móvil está a la derecha del origen y negativas si está a la izquierda del origen.

Posición de una partícula

La posición *x* del móvil se puede relacionar con el tiempo *t* mediante una función

$$x = f(t)$$



Desplazamiento de una partícula

Supongamos ahora que en el tiempo *t*, el móvil se encuentra en posición *x*, más tarde, en el instante *t'* el móvil se encontrará en la posición *x'*. Decimos que móvil se ha desplazado $\Delta x = x' - x$ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t' - t$, medido desde el instante *t* al instante *t'*.

Velocidad de una partícula

La velocidad media entre los instantes *t* y *t'* está definida por

$$\langle v \rangle = \frac{x'-x}{t'-t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Para determinar la velocidad en el instante *t*, debemos hacer el intervalo de tiempo Δ*t* tan pequeño como sea posible, en el límite cuando Δ*t* tiende a cero.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Pero dicho límite, es la definición de derivada de *x* con respecto del tiempo *t*.

Ecuaciones del movimiento.

Sabemos que la velocidad V_0 es constante, esto es, no existe aceleración.

$V = V_0$

La posición x en el instante t viene dada por:

$x = V_0 t + x_0$

Donde x_0 es la posición inicial.

Para el cálculo del espacio recorrido, sabiendo que la velocidad es constante y según la definición de velocidad:

1. $V = V_0$
2. $V = \frac{dx}{dt}$

tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = V_0$$

despejando términos:

$dx = V_0 dt$

integrando:

$$\int dx = \int V_0 dt$$

realizando la integral:

$x = V_0 t + x_0$

Donde x_0 es la constante de integración, que corresponde a la posición del móvil para ***t = 0***. Si en el instante ***t = 0***, el móvil esta en el origen de coordenadas, entonces $x_0 = 0$. Esta ecuación determina la posición de la partícula en movimiento en función del tiempo.

Para comprender mejor el concepto de velocidad media, resolvemos el siguiente ejercicio

Ejercicio 122.1.- Una partícula se mueve a lo largo del eje X, de manera que su posición en cualquier instante "*t*" está dada por $x = 5\cdot t^2+1$, donde *x* se expresa en metros y *t* en segundos.

Calcular su velocidad promedio en el intervalo de tiempo entre:

- 2 y 3 s.
- 2 y 2.1 s.
- 2 y 2.01 s.
- 2 y 2.001 s.
- 2 y 2.0001 s.
- Calcula la velocidad en el instante *t*=2 s.

Sustituyendo valores $x = 5\ (3)^2 +1$; $x = 5\ (9) + 1$; $x = 45 + 1$; $x = 46$ m

En el instante *t*=2 s, *x*=21 m				
t' (s)	*x*' (m)	Δx=*x*'-*x*	Δt=*t*'-*t*	$<v>=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ m/s
3	46	25	1	25
2.1	23.05	2.05	0.1	20.5
2.01	21.2005	0.2005	0.01	20.05

2.001	21.020005	0.020005	0.001	20.005
2.0001	21.00200005	0.00200005	0.0001	20.0005
...	...	...	...	...
			0	20

Como podemos apreciar en la tabla, cuando el intervalo $\Delta t\to 0$, la velocidad media tiende a 20 m/s. La velocidad en el instante t =2 s es una velocidad media calculada en un intervalo de tiempo que tiende a cero.

Calculamos la velocidad en cualquier instante t

- La posición del móvil en el instante t es $x = 5t^2+1$
- La posición del móvil en el instante $t+\Delta t$ es $x'=5(t+\Delta t)^2+1=5t^2+10t\Delta t+5\Delta t^2+1$
- El desplazamiento es $\Delta x=x'-x=10t\Delta t+5\Delta t^2$
- La velocidad media $<v>$ es $\langle v \rangle = \frac{x'-x}{t'-t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ entonces tenemos sustituyendo:

$$< v > = \frac{10t\cdot\Delta t + 5\Delta t^2}{\Delta t} = 10t + 5\Delta t$$

La velocidad en el instante t es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero

$$v = \lim_{\Delta t\to 0} < v > = \lim_{\Delta t\to 0}\left(10t + 5\Delta t\right) = 10t \text{ m/s}$$

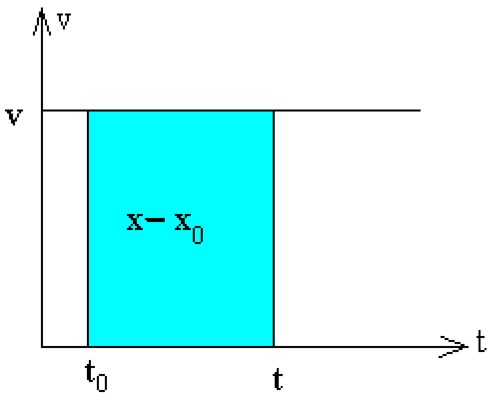
La velocidad en un instante t se puede calcular directamente, hallando la derivada de la posición x respecto del tiempo.

$$x = 5t^2 + 1 \text{ m}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 10t \text{ m/s}$$

En el instante t=2 s, tenemos como su velocidad a v=20 m/s.

Movimiento rectilíneo uniforme



Un movimiento rectilíneo uniforme es aquél cuya velocidad es constante, por tanto, la aceleración es cero. La posición *x* del móvil en el instante *t* lo podemos calcular integrando

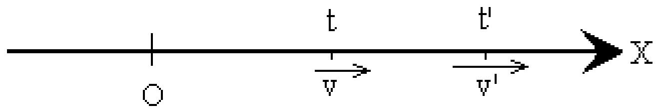
$$x - x_0 = v \cdot (t - t_0)$$

o gráficamente, en la representación de *v* en función de *t*.

Habitualmente, el instante inicial t_0 se toma como cero, por lo que las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniforme resultan:

$$a = 0$$
$$v = cte$$
$$x = x_0 + v \cdot t$$

Aceleración de una partícula



En general, la velocidad de un cuerpo es una función del tiempo. Supongamos que en un instante *t* la velocidad del móvil es *v*, y en el instante *t'* la velocidad del móvil es *v'*. Se denomina aceleración media entre los instantes *t* y *t'* al cociente entre el cambio de velocidad $\Delta v = v'-v$ y el intervalo de tiempo en el que se ha tardado en efectuar dicho cambio, $\Delta t = t'-t$.

$$\langle a \rangle = \frac{v'-v}{t'-t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

La aceleración en el instante *t* es el límite de la aceleración media cuando el intervalo Δ*t* tiende a cero, que es la definición de la derivada de *v*.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Ejemplo 122.2.- Un cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta $x=2t^3-4t^2+5$ m. Hallar la expresión de:

- La velocidad
- La aceleración del móvil en función del tiempo.

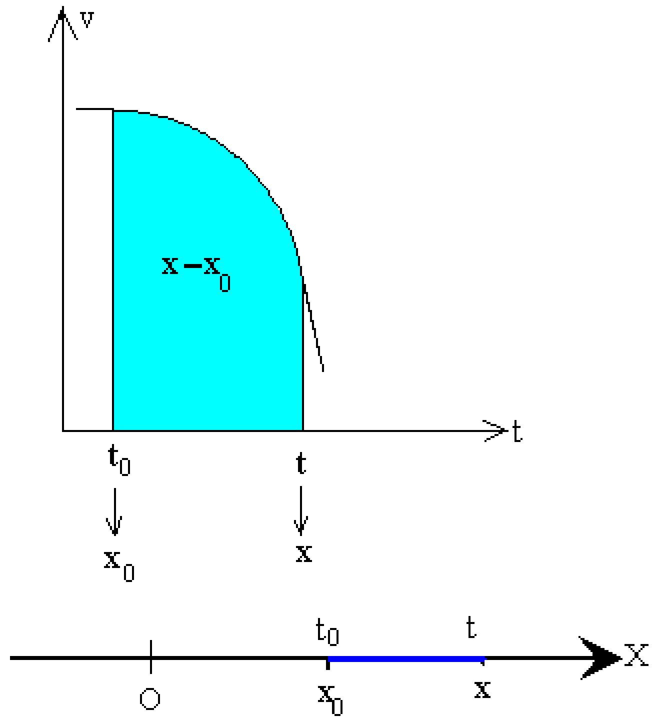
$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 8t \quad \text{m/s}$$
$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 8 \quad \text{m/s}^2$$

Dada la velocidad del móvil hallar el desplazamiento

Si conocemos un registro de la velocidad podemos calcular el desplazamiento $x-x_0$ del móvil entre los instantes t_0 y *t*, mediante la integral definida.

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v \cdot dt$$

El producto *v· dt* representa el desplazamiento del móvil entre los instantes *t* y *t*+*dt*, o en el intervalo *dt*. El desplazamiento total es la suma de los infinitos desplazamientos infinitesimales entre los instantes t_0 y *t*.



En la figura, se muestra una gráfica de la velocidad en función del tiempo, el área en color azul mide el desplazamiento total del móvil entre los instantes t_0 y t, el segmento en color azul marcado en la trayectoria recta.

Hallamos la posición x del móvil en el instante t, sumando la posición inicial x_0 al desplazamiento, calculado mediante la medida del área bajo la curva *v-t* o mediante cálculo de la integral definida en la fórmula anterior.

Ejemplo 122.3.- Un cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta de acuerdo a la ley $v=t^3-4t^2+5$ m/s. Si en el instante $t_0=2$ s. está situado en $x_0=4$ m del origen. Calcular la posición x del móvil en cualquier instante.

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v \cdot dt$$

Utilizando esta fórmula y sustituyendo valores tenemos:

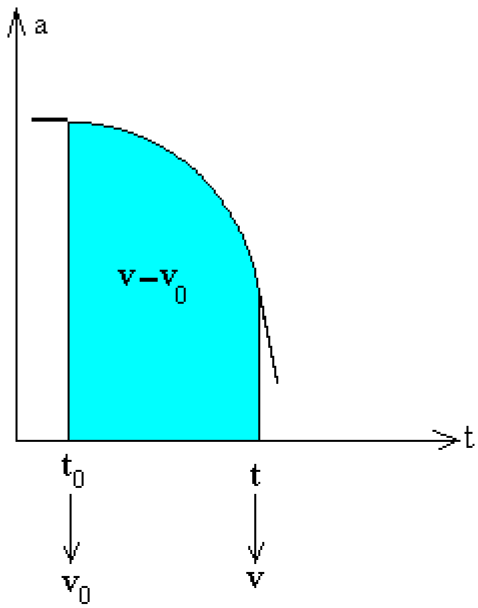
$$x - 4 = \int_{2}^{t} (t^3 - 4t^2 + 5)dt$$

$$x = \frac{t^4}{4} - \frac{4t^3}{3} + 5t + \frac{2}{3} \quad \text{m}$$

Dada la aceleración del móvil hallar el cambio de velocidad

Del mismo modo, que hemos calculado el desplazamiento del móvil entre los instantes t_0 y t, a partir de un registro de la velocidad v en función del tiempo t, podemos calcular el cambio de velocidad $v-v_0$ que experimenta el móvil entre dichos instantes, a partir de un registro de la aceleración en función del tiempo.

$$v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a \cdot dt$$



En la figura, el cambio de velocidad *v*-v_0 es el área bajo la curva *a*-*t*, o el valor numérico de la integral definida en la fórmula anterior.

Conociendo el cambio de velocidad *v*-v_0, y el valor inicial v_0 en el instante t_0, podemos calcular la velocidad *v* en el instante *t*.

Ejemplo 122.4.- La aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de una línea recta viene dada por la expresión. $a = 4 - t^2$ m/s^2. Sabiendo que en el instante t_0 = 3 s, la velocidad del móvil vale v_0 = 2 m/s. Determinar la expresión de la velocidad del móvil en cualquier instante.

$$v - 2 = \int_{3}^{t} (4 - t^2) dt$$

$$v = 4t - \frac{t^3}{3} - 1 \text{ m/s}$$

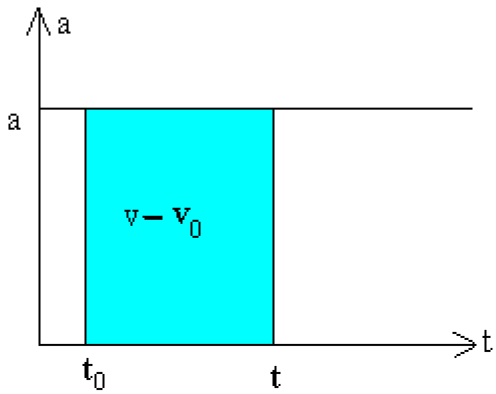
Que es la solución de la velocidad buscada

Resumiendo, las fórmulas empleadas para resolver problemas de movimiento rectilíneo son las siguientes:

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

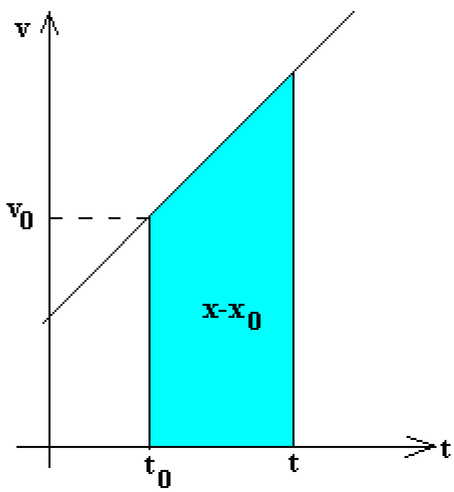
$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\, dt \qquad v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a\, dt$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.



Un movimiento uniformemente acelerado es aquél cuya aceleración es constante. Dada la aceleración podemos obtener el cambio de velocidad v-v_0 entre los instantes t_0 y t, mediante integración, o gráficamente.

$$v - v_0 = a \cdot (t - t_0)$$



Dada la velocidad en función del tiempo, obtenemos el desplazamiento x-x_0 del móvil entre los instantes t_0 y t, gráficamente (área de un rectángulo + área de un triángulo), o integrando

$$x - x_0 = v_0 \cdot (t - t_0) + \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2$$

Habitualmente, el instante inicial t_0 se toma como cero, quedando las fórmulas del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, las siguientes.

$$a = \text{cte}$$
$$v = v_0 + a \cdot t$$
$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Despejando el tiempo t en la segunda ecuación y sustituyéndola en la tercera, relacionamos la velocidad v con el desplazamiento x-x_0

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Resolver los siguientes problemas:

Problema n° 1 ¿A cuántos m/s equivale la velocidad de un móvil que se desplaza a 72 km/h?

Desarrollo

Datos:

v = 72 km/h

$$v = 72\frac{km}{h}\cdot\frac{1h}{3600\ s}\cdot\frac{1000\ m}{1km} = 72\ \frac{1}{3600\ s}\cdot\frac{1000\ m}{1} = 20\ \frac{m}{s}$$

Movimiento rectilíneo uniforme:

Problema n° 2) Un móvil viaja en línea recta con una velocidad media de 1.200 cm/s durante 9 s, y luego con velocidad media de 480 cm/s durante 7 s, siendo ambas velocidades del mismo sentido:

a) ¿cuál es el desplazamiento total en el viaje de 16 s?.

b) ¿cuál es la velocidad media del viaje completo?.

Desarrollo

Datos:

v_1 = 1.200 cm/s

t_1 = 9 s

v_2 = 480 cm/s

t_2 = 7 s

a) El desplazamiento es:

x = v.t

Para cada lapso de tiempo:

$x_1 = (1200\ cm/s).9\ s$
$x_1 = 10800\ cm$

$x_2 = (480\ cm/s).7\ s$
$x_2 = 3360\ cm$

El desplazamiento total es:

$X_t = X_1 + x_2$

$X_t = 10800\ cm + 3360\ cm$
$X_t = 14160\ cm = 141,6\ m$

b) Como el tiempo total es:

$t_t = t_1 + t_2 = 9\ s + 7\ s = 16\ s$

Con el desplazamiento total recién calculado aplicamos:

$\Delta v = x_t/t_t$
$\Delta v = 141,6\ m/16\ s$
$\Delta\ v = 8,85\ m/s$

Movimiento rectilíneo uniforme:

Problema n° 3) Resolver el problema anterior, suponiendo que las velocidades son de distinto sentido.

Desarrollo

a) Si son de distinto sentido:

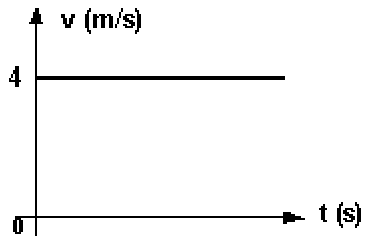
$X_t = X_1 - x_2$

$X_t = 10800\ cm - 3360\ cm$
$X_t = 7440\ cm = 74,4\ m$

b)

$\Delta v = x_t/t_t$
$\Delta v = 74,4\ m/16\ s$
$\Delta\ v = 4,65\ m/s$

Problema n° 4) En el gráfico, se representa un movimiento rectilíneo uniforme, averigüe gráfica y analíticamente la distancia recorrida en los primeros 4 s.



Problema 4

Desarrollo

Datos:

v = 4 m/s

t = 4 s

v = x/t
x = v.t
x = 4 m/s.4 s □ x = 16 m

Movimiento rectilíneo uniforme:

Problema n° 5) Un móvil recorre una recta con velocidad constante. En los instantes t_1 = 0 s y t_2 = 4 s, sus posiciones son x_1 = 9,5 cm y x_2 = 25,5 cm. Determinar:

a) Velocidad del móvil.

b) Su posición en t_3 = 1 s.

c) Las ecuaciones de movimiento.

d) Su abscisa en el instante t_4 = 2,5 s.

e) Los gráficos x = f(t) y v = f(t) del móvil.

Desarrollo

Datos:

$t_1 = 0$ s

$x_1 = 9,5$ cm

$t_2 = 4$ s

$x_2 = 25,5$ cm

a) Como:

$\Delta v = \Delta x/\Delta t$
$\Delta v = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$

$\Delta v = (25,5 \text{ cm} - 9,5 \text{ cm})/(4 \text{ s} - 0 \text{ s})$
$\Delta v = 16 \text{ cm}/4 \text{ s}$

$\Delta v = 4$ cm/s

b) Para $t_3 = 1$ s:

$\Delta v = \Delta x/\Delta t$
$\Delta x = \Delta v.\Delta t$

$\Delta x = (4 \text{ cm/s}).1 \text{ s}$
$\Delta x = 4$ cm

Sumado a la posición inicial:

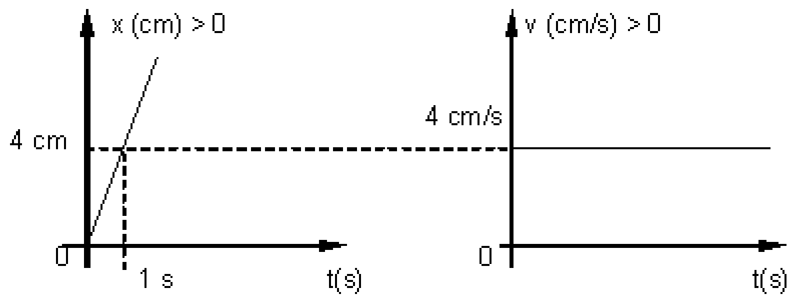
$x_3 = x_1 + \Delta x$
$x_3 = 9,5 \text{ cm} + 4 \text{ cm}$
$x_3 = 13,5$ cm

c)

$x = 4 \text{ (cm/s)}.t + 9,5 \text{ cm}$

d) Con la ecuación anterior para $t_4 = 2,5$ s:

$x_4 = (4 \text{ cm/s}).t_4 + 9,5 \text{ cm}$
$x_4 = (4 \text{ cm/s}).2,5 \text{ s} + 9,5 \text{ cm}$
$x_4 = 19,5$ cm



Movimiento rectilíneo uniforme:

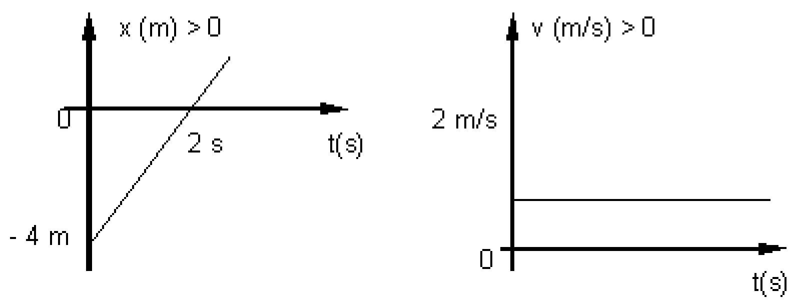
Problema n° 6) Una partícula se mueve en la dirección del eje x y en sentido de los x > 0. Sabiendo que la velocidad es 2 m/s, y su posición es x_0 = -4 m, trazar las gráficas x = f(t) y v = f(t).

Desarrollo

Datos:

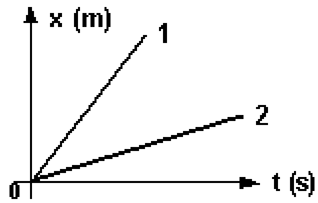
v = 2 m/s

x_0 = -4 m



Movimiento rectilíneo uniforme

Pregunta n° 1) ¿Cuál de los dos movimientos representados tiene mayor velocidad?, ¿por qué?



El movimiento 1 es el más rápido (teniendo en cuenta que se comparan en la misma gráfica).

Porque v = x/t

Para el caso 1: $v_1 = x_1/t_1$

Para el caso 2: $v_2 = x_2/t_2$

Para compara hacemos $t = t_1 = t_2$.

Entonces para un mismo lapso de tiempo notamos que $x_1 > x_2$.

Movimiento rectilíneo uniforme

Pregunta n° 2) ¿Es cierto que si en un movimiento rectilíneo uniforme la velocidad es el doble que en otro, la gráfica x = f(t), trazada en un mismo par de ejes, tiene el doble de pendiente que en el primer caso?, ¿por qué?

Si, ya que: v = x/t

Si $v_1 = x_1/t_1$.

Si $v_2 = x_2/t_2$.

Por ejemplo para v_1 sea el doble que v_2 significa que:

$v_1 = 2.v_2$

Para compara hacemos $t_1 = t_2$.

Reemplazamos:

$v_1 = x_1/t_1$ (pendiente del movimiento 1).

$v_2 = x_2/t_1$ (pendiente del movimiento 2).

Aplicamos la igualdad:

$v_1 = 2.v_2$

$x_1/t_1 = 2.x_2/t_1$

$x_1 = 2.x_2$

Nos dice que recorre el doble de espacio en el mismo lapso de tiempo.

Movimiento rectilíneo uniforme

Pregunta n° 3) ¿Qué relación existe entre pendiente y tangente trigonométrica?

La pendiente es la razón entre el desplazamiento en el eje "x" y el período de tiempo en el eje "t" entre dos punto de la gráfica de velocidad.

Esta gráfica tiene una inclinación determinada por un ángulo (α), la tangente de α es la velocidad.

$tg\ \alpha = \Delta x/\Delta t = v.$

1) Transforma 72 [Km / hr]en[m / s]

$72 \div 3,6=20$

\72 [Km / hr]=20 [m / s]

2) Transforma 5 [m / s]en[Km / hr]

$5 \times 3,6=18$

\5 [m / s]=18 [Km / hr]

3) Un móvil con Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU) tiene una rapidez de4 [m / s].Calcula la distancia que recorre en6 [s].

$d=v \times t$

d=4 [m / s] × 6 [s]=24 [m]

4) Un velocista corre los100 [m]planos en10 [s]. Calcula su rapidez media.

$d = v_m \times t$

$100\,[m] = v_m \times 10\,[s]$

$v_m = 10\,[m/s]$

5) Calcula el tiempo que demora un automóvil en recorrer $800\,[m]$, con una rapidez media de $20\,[m/s]$.

$d = v_m \times t$

$800\,[m] = 20\,[m/s] \times t$

$t = 40\,[s]$

6) Dos ciclistas con MRU en un instante dado están a $20\,[m]$ de distancia. El primer ciclista tiene una rapidez de $6\,[m/s]$ y el segundo ciclista, que persigue al primero, tiene una rapidez de $10\,[m/s]$. Calcula el tiempo que demorará el segundo ciclista en alcanzar al primero y la distancia que recorrerá c / u, desde ese instante.

Para el primer ciclista: $d_1 = v_1 \times t$

Para el segundo ciclista: $d_2 = v_2 \times t$

Cuando el segundo ciclista alcance al primero se cumplirá que:

$d_2 = d_1 + 20\,[m]$

$v_2 \times t = v_1 \times t + 20\,[m]$

$v_2 \times t - v_1 \times t = 20\,[m]$

$(v_2 - v_1) \times t = 20\,[m]$

$(10\,[m/s] - 6\,[m/s]) \times t = 20\,[m]$

$4\,[m/s] \times t = 20\,[m]$

$t = 5\,[s]$

Distancia que recorrerá el primer ciclista: $d_1 = 6\,[m/s] \times 5\,[s] = 30\,[m]$

Distancia que recorrerá el segundo ciclista: $d_2 = 10\,[m/s] \times 5\,[s] = 50\,[m]$

7) Dos proyectiles con MRU se encuentran a $600\ [\,m\,]$ uno del otro. Si se desplazan sobre una misma trayectoria, uno hacia el otro, el primero con una rapidez de $80\ [\,m/s\,]$ y el segundo a $70\ [\,m/s\,]$. Calcula el tiempo, desde ese instante, que demorarán en chocar y la distancia que recorrerá c / u.

Para el primer proyectil: $d_1 = v_1 \times t$

Para el segundo proyectil: $d_2 = v_2 \times t$

Cuando choquen se cumplirá que:

$$d_1 + d_2 = 600\ [\,m\,]$$

$$v_1 \times t + v_2 \times t = 600\ [\,m\,]$$

$$(v_1 + v_2) \times t = 600\ [\,m\,]$$

$$(80\ [\,m/s\,] + 70\ [\,m/s\,]) \times t = 600\ [\,m\,]$$

$$150\ [\,m/s\,] \times t = 600\ [\,m\,]$$

$$t = 4\ [\,s\,]$$

Distancia que recorrerá el primer proyectil: $d_1 = 80\ [\,m/s\,] \times 4\ [\,s\,] = 320\ [\,m\,]$

Distancia que recorrerá el segundo proyectil: $d_2 = 70\ [\,m/s\,] \times 4\ [\,s\,] = 280\ [\,m\,]$

8) Un móvil que llevaba una rapidez de $4\ [\,m/s\,]$ acelera durante $6\ [\,s\,]$ y adquiere una rapidez de $22\ [\,m/s\,]$. Calcula su aceleración media.

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t} = \frac{22\ [\,m/s\,] - 4\ [\,m/s\,]}{6\ [\,s\,]} = 3\ [\,m/s^2\,]$$

9) Un móvil con Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA) tiene en un instante dado una rapidez de $2\ [\,m/s\,]$ y una aceleración de $4\ [\,m/s^2\,]$. Calcula el tiempo que demorará, desde ese instante, en alcanzar la rapidez de $26\ [\,m/s\,]$.

$$a=\frac{v\,2-v1}{t}=\frac{v\,2-v1}{a}=\frac{26\,[\,m\,/\,s\,]-2\,[\,m\,/\,s\,]}{4\,[\,m\,/\,s\,2\,]}=6\,[\,s\,]$$

10) Un atleta tenía en un instante dado una rapidez de4 [m / s]. Si a partir de ese instante y durante2 [s]adquirió un MRUA con una aceleración de3 [m / s 2]. Calcularla rapidez que alcanzó al cabo de esos2 [s].

$v\,2=v\,1+a\times t=4\,[\,m\,/\,s\,]+3\,[\,m\,/\,s\,2\,]\times 2\,[\,s\,]=10\,[\,m\,/\,s\,]$

11) Un móvil en un instante dado adquirió un MRUA con una aceleración de5 [m / s 2]. Si al cabo de 6[s]alcanzó una rapidez de40 [m / s]. Calcula su rapidez inicial en ese instante dado.

$v\,1=v\,2-a\times t=40\,[\,m\,/\,s\,]-5\,[\,m\,/\,s\,2\,]\times 6\,[\,s\,]=10\,[\,m\,/\,s\,]$

12) Una velocista en una carrera de100 [m]planos, partió del reposo con una aceleración de5 [m / s 2] y la mantuvo durante2 [s]. Calcula la rapidez que alcanzó y la distancia que recorrió al cabo de esos 2 [s].

$v\,2=v\,1+a\times t=0\,[\,m\,/\,s\,]+5\,[\,m\,/\,s\,2\,]\times 2\,[\,s\,]=10\,[\,m\,/\,s\,]$

$d=v\,1\times t+1/2\times a\times t\,2=1/2\times 5\,[\,m\,/\,s\,2\,]\times 4\,[\,s\,2\,]=10\,[\,m\,]$

13) Un vehículo partió del reposo con una aceleración constante y al cabo de4 [s]alcanzó una rapidez de20 [m / s]. Suponiendo que el vehículo adquirió un MRUA, calcula su aceleración y la distancia que recorrió durante esos4 [s].

$$a=\frac{v\,2-v1}{t}=\frac{20\,[\,m\,/\,s\,]-0[\,m\,/\,s\,]}{4\,[\,s\,]}=5\,[\,m\,/\,s\,2\,]$$

$d=v\,1\times t+1/2\times a\times t\,2=1/2\times 5\,[\,m\,/\,s\,2\,]\times 16\,[\,s\,2\,]=40\,[\,m\,]$

14) Un móvil con MRUA tenía en un instante dado una rapidez de28 [m / s]. Al cabo de6 [s]su rapidez disminuyó a16 [m / s]. Calcula su aceleración y la distancia que recorrió en esos6 [s].

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t} = \frac{16\ [\ m\ /\ s\ ] - 28\ [\ m\ /\ s\ ]}{6\ [\ s\ ]} = -2\ [\ m\ /\ s^2\ ]$$

$d = v_1 \times t + 1/2 \times a \times t^2 = 28\ [\ m\ /\ s\ ] \times 6\ [\ s\ ] + 1/2 \times (-2\ [\ m\ /\ s^2\ ]) \times 36\ [\ s^2\ ] = 132\ [\ m\ ]$

15) Un tren que en un instante dado tenía una rapidez de 15 [m / s] adquirió una aceleración de – 3 [m / s 2] durante 2 [s]. Calcula su rapidez final y la distancia que recorrió al cabo de esos2 [s].

$v_2 = v_1 + a \times t = 15\ [\ m\ /\ s\ ] - 3\ [\ m\ /\ s^2\ ] \times 2\ [\ s\ ] = 9\ [\ m\ /\ s\ ]$

$d = v_1 \times t + 1/2 \times a \times t^2$

$= 15\ [\ m\ /\ s\ ] \times 2\ [\ s\ ] + 1/2 \times (-3\ [\ m\ /\ s^2\ ]) \times 4\ [\ s^2\ ] = 24\ [\ m\ ]$

1.2.3 MOVIMIENTO RELATIVO

Movimiento relativo

Movimiento relativo, cambio de posición respecto de un sistema de referencia que a su vez se mueve respecto a otro sistema de referencia. No se puede hablar de un sistema de referencia absoluto ya que no se conoce un punto fijo en el espacio que pueda ser elegido como origen de dicho sistema. Por tanto, el movimiento tiene carácter relativo.

Ejemplo 1:

Un río fluye hacia el este con velocidad de c =3 m/s. Un bote se dirige hacia el este (aguas abajo) con velocidad relativa al agua de v=4 m/s.

- Calcular la velocidad del bote respecto de tierra cuando el bote se dirige hacia el este (río abajo) y cuando se dirige hacia el oeste (río arriba).
- Calcular el tiempo que tarda el bote en desplazarse d=100 m hasta el punto P y regresar de nuevo al punto de partida O.

	• Cuando el bote navega aguas abajo la velocidad del bote respecto de tierra es $c+v$, es decir de 7 m/s. • Cuando el bote navega en sentido contrario a la corriente la velocidad del bote respecto de tierra es $c-v$, es decir de -1 m/s.

El tiempo que tarda el barquero en hacer el viaje de ida es $t_1=d/(v+c)$

El tiempo que tarda en hacer el viaje de vuelta es $t_2=d/(v-c)$

El tiempo total es

Con los datos del problema t = 800/7 = 114.3 s.

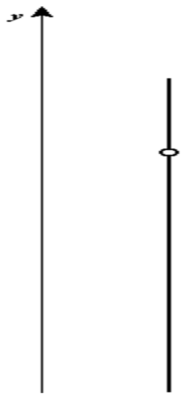
1.2.4 CAIDA LIBRE DE CUERPOS

En mecánica, la **caída libre** es la trayectoria que sigue un cuerpo bajo la acción de un campo gravitatorio exclusivamente. Aunque la definición excluya la acción de otras fuerzas como la resistencia aerodinámica, es común hablar de caída libre en la situación en la que el peso discurre inmerso en la atmósfera. Se refiere también a caída libre como una trayectoria geodésica en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones de la Teoría de la Relatividad General.

La caída libre como sistema de referencia

Un sistema de referencia cuya trayectoria sea la de la caída libre puede considerarse **inercial** o **no inercial** en función del marco teórico que esté utilizándose. En física clásica la gravedad es una fuerza que aparece sobre una masa y que es proporcional al campo gravitatorio medido en la posición espacial donde se encuentre dicha masa. La constante de proporcionalidad es precisamente el valor de la masa inercial del cuerpo, tal y como establece el principio de equivalencia. En física relativista la gravedad es el efecto, sobre las trayectorias de los cuerpos, del espacio-tiempo curvado. En este último caso, la gravedad no es una fuerza, sino una geodésica. Por tanto, desde el punto de vista de la física clásica, un sistema de referencia en caída libre es un sistema acelerado por la fuerza de la gravedad y, como tal, es no inercial. Por el contrario, desde el punto de vista de la física relativista, el mismo sistema de referencia es inercial, pues aunque es acelerado en el espacio, no es acelerado en el espacio-tiempo. La diferencia radica en la propia definición de los conceptos geométricos y cinemáticos, que para un marco teórico y para el otro, son completamente diferentes.

Aceleración en caída libre



Caída libre

Si en este movimiento se desprecia el rozamiento del cuerpo con el aire, es decir, se estudia en el vacío. El movimiento de la caída libre es un movimiento uniformemente acelerado. La aceleración instantánea debida sólo a la gravedad es independiente de la masa del cuerpo, es decir, si dejamos caer un coche y una pluma, ambos cuerpos tendrán la misma aceleración, que coincide con la aceleración de la gravedad (**g**).

Cuando la caída libre tiene lugar en el seno de un fluido como el aire, hay que considerar las fuerzas viscosas que actúan sobre el cuerpo. Aunque técnicamente la caída ya no es libre, desarrollaremos en adelante las ecuaciones incluyendo el término aerodinámico excepto en los casos en los que no proceda (por ejemplo espacio exterior).

Caída libre en campo aproximadamente constante

Sabemos por la segunda ley de Newton que la suma de fuerzas $\mathbf{F}$es igual al producto entre la masa del cuerpo mas la aceleración del mismo. En caída libre sólo intervienen el peso $\mathbf{P}$, que siempre es vertical, y el rozamiento aerodinámico $\mathbf{F}_r(v)$ que va en la misma dirección aunque en sentido opuesto a la velocidad. La ecuación de movimiento es por tanto:

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_r = -mg\hat{\mathbf{j}} - \frac{\mathbf{v}}{|v|}F_r$$

Siendo *m* la masa del cuerpo.

La aceleración de la gravedad se indica con signo negativo, porque tomamos el eje de referencia desde el suelo hacia arriba, los vectores ascendentes los consideraremos positivos y los descendentes negativos, la aceleración de la gravedad es descendente, por eso el signo **-**.

Trayectoria en caída libre

La trayectoria de caída libre es la distancia recorrida en ángulo determinado sea vertical u horizontal.

Caída libre totalmente vertical

El movimiento del cuerpo en caída libre es vertical con velocidad creciente (movimiento uniformemente acelerado con aceleración **g**). La ecuación de movimiento se puede escribir en términos la altura *y*:

$$(1)\quad ma_y = m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + F_r(v_y)$$

Donde:

> a_y, v_y, son la aceleración y la velocidad verticales.
> F_r, es la fuerza de rozamiento fluido dinámica (que es creciente con la velocidad).

Si se desprecia en una primera aproximación la fuerza de rozamiento, cosa que puede hacerse para caídas desde pequeñas alturas de cuerpos relativamente compactos, en las que se alcanzan pequeñas velocidades la solución de la ecuación diferencial (1) para las velocidades y la altura vienen dada por:

$$\begin{cases} v_y(t) = v_0 - gt \\ y(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Donde v_0 es la velocidad inicial, para una caída desde el reposo $v_0 = 0$ y h_0 es la altura inicial de caída.

Para grandes alturas u objetos de gran superficie (una pluma, un paracaídas) es necesario tener en cuenta la fricción del aire que suele ser modelizada como una fuerza proporcional a la velocidad, siendo la constante de proporcionalidad el llamado rozamiento aerodinámico k_w:

$$ma_y = m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - k_w v_y \quad (2)$$

En este caso la variación con el tiempo de la velocidad y el espacio recorrido vienen dados por la solución de la ecuación diferencial (2):

$$\begin{cases} v_y(t) = v_0 e^{-k_w t/m} + \frac{mg}{k_w}(e^{-k_w t/m} - 1) \\ y(t) = h_0 - \frac{mgt}{k_w} + m\left(\frac{mg + k_w v_0}{k_w^2}\right)(e^{-k_w t/m} - 1) \end{cases}$$

Nótese que en este caso existe una velocidad límite dada por el rozamiento aerodinámico y la masa del cuerpo que cae:

$$v_\infty = \lim_{t\to\infty} v_y(t) = -\frac{mg}{k_w}$$

Un análisis más cuidado de la fricción de un fluido revela que a grandes velocidades el flujo alrededor de un objeto no puede considerarse laminar, sino turbulento y se producen remolinos alrededor del objeto que cae de tal manera que la fuerza de fricción se vuelve proporcional al cuadrado de la velocidad:

$$ma_y = m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - \epsilon\frac{C_d}{2}\rho A_t v_y^2 \quad (3)$$

Donde:

C_d, es el coeficiente aerodinámico de resistencia al avance, que sólo depende de la forma del cuerpo.
A_t, es el área transversal a la dirección del movimiento.
ρ, es la densidad del fluido.
$\epsilon = sgn(v_y)$, es el signo de la velocidad.

La velocidad límite puede calcularse fácilmente poniendo igual a cero la aceleración en la ecuación (3):

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{C_d \rho A_t}}$$

La solución analítica de la ecuación diferencial (3) depende del signo relativo de la fuerza de rozamiento y el peso por lo que la solución analítica es diferente para un cuerpo que sube hacia arriba o para uno que cae hacia abajo. La solución de velocidades para ambos casos es:

$$\begin{cases} v_y(t) = \sqrt{\dfrac{g}{\alpha}} \tan\left(-t\sqrt{\alpha g} + \arctan\left(v_0\sqrt{\dfrac{\alpha}{g}}\right)\right) & v_y(t) > 0 \\ v_y(t) = \sqrt{\dfrac{g}{\alpha}} \tanh\left(-t\sqrt{\alpha g} - \operatorname{arctanh}\left(v_0\sqrt{\dfrac{\alpha}{g}}\right)\right) & v_y(t) \leq 0 \end{cases}$$

Donde: $\alpha = C_d \rho A_t / 2m$.

Si se integran las ecuaciones anteriores para el caso de caída libre desde una altura h_0 y velocidad inicial nula y para el caso de lanzamiento vertical desde una altura nula con una velocidad inicial v_0 se obtienen los siguientes resultados para la altura del cuerpo:

Caída libre (v_0 = 0 y y (0) = h_0):

$$y(t) = h_0 - \frac{1}{\alpha} \ln\left[\cosh\left(-t\sqrt{\alpha g}\right)\right]$$

El tiempo transcurrido en la caída desde la altura $y = h_0$ hasta la altura $y = 0$ puede obtenerse al reordenar la ecuación anterior:

$$t(0) - t(h_0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha g}} \operatorname{arccosh}\left(e^{\alpha h_0}\right)$$

Lanzamiento vertical ($v_0 = v_0$ y $y(0) = 0$):

$$y(t) = \frac{1}{\alpha}\ln\left[\frac{\cos\left[-t\sqrt{\alpha g} + \arctan\left(v_0\sqrt{\frac{\alpha}{g}}\right)\right]}{\cos\left[\arctan\left(v_0\sqrt{\frac{\alpha}{g}}\right)\right]}\right]$$

Si la altura h_0 es aquella en que la velocidad vertical se hace cero, entonces el tiempo transcurrido desde el lanzamiento hasta el instante en que se alcanza la altura h_0 puede calcularse como:

$$t(h_0) - t(0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha g}}\arctan\left(v_0\sqrt{\frac{\alpha}{g}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha g}}\arccos\left(e^{-\alpha h_0}\right)$$

Se puede demostrar que el tiempo que tarda un cuerpo en caer desde una altura h_0 hasta el suelo a través del aire es mayor que el que tarda el mismo cuerpo en alcanzar la altura máxima de h_0 si es lanzado desde el suelo. Para ello basta con probar la desigualdad siguiente:

$$\operatorname{arccosh}\left(e^{\alpha h_0}\right) > \arccos\left(e^{-\alpha h_0}\right)$$

$$\forall \alpha, h_0 > 0$$

Sabiendo que $\operatorname{arccosh}\left(e^{\alpha h_0}\right) \in [1, +\infty)$ y que $\arccos\left(e^{-\alpha h_0}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Caída libre parabólica y casi-parabólica

Cuando un cuerpo cae en caída libre pero no parte del reposo porque tiene una velocidad no nula, entonces la trayectoria de caída no es una recta sino una curva aproximadamente parabólica. La ecuación de la trayectoria en coordenadas cartesianas, donde *x* va a ser la distancia recorrida horizontalmente y *y* la altura sobre el nivel del suelo viene dada simplemente por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} \qquad \begin{cases} v_y(0) = 0 \\ v_x(0) = V_x \end{cases} \qquad \begin{cases} y(0) = h_0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Donde la expresión de la velocidad vertical debe reescribirse en función de la coordenada *x* teniendo en cuenta que $t = x/v_x$. Pueden distinguirse los siguientes casos:

- Para un cuerpo en caída libre sin rozamiento la curva trayectoria es exactamente una parábola dada por:

$$y(x) = h_0 - \frac{gx^2}{2V_x^2}$$

- Cuando se incluye el rozamiento aerodinámico la curva no es exactamente una parábola. Por ejemplo para una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad como en la (2) la trayectoria resulta ser:

$$y(x) = h_0 - \delta\left[\frac{x}{\beta\delta} - \ln\left(1 - \frac{x}{\beta\delta}\right)\right] \qquad \begin{cases} \delta = gm^2/k_w^2 \\ \beta = V_x k_w/mg \end{cases}$$

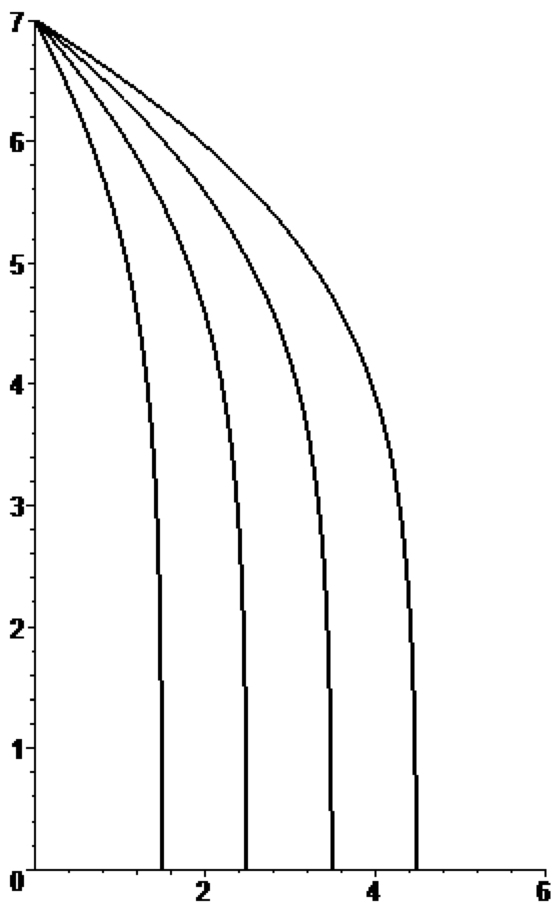
Para una fuerza de rozamiento proporcional al cuadrado de la velocidad la integración de las ecuaciones del movimiento es más compleja, presuponiendo fuerzas de rozamiento independientes en dirección horizontal y vertical proporcionales al cuadrado del valor de la componente:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = -C_w v_x^2 \\ \dfrac{dv_y}{dt} = +C_w v_y^2 - g \end{cases}$$

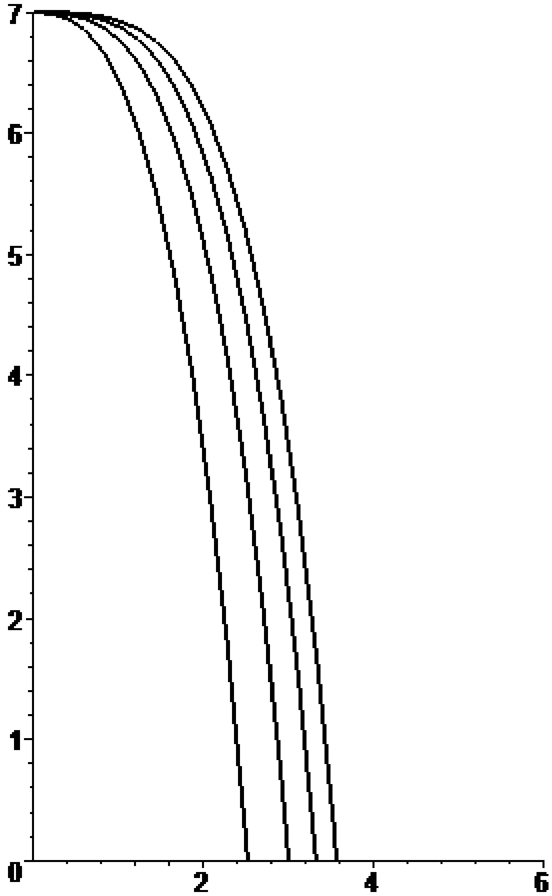
La trayectoria viene dada por:

$$y(x) = h_0 - \delta \ln \left[\cosh \left(\frac{e^{x/\delta} - 1}{\beta} \right) \right] \qquad \begin{cases} \delta = 1/C_w \\ \beta = \sqrt{g/(C_w V_x^2)} \end{cases}$$

Las figuras adjuntas muestran la forma de las trayectorias para cinco valores diferentes del parámetro β para una misma altura de caída (medida en unidades de longitud δ).



Rozamiento -$k_w v$. Trayectorias casi parabólicas con rozamiento proporcional a la velocidad, para cinco valores diferentes de la velocidad horizontal β = 1,5, β = 2,5, β = 3,5 y β = 4,5, desde una altura *h* = 7δ



Rozamiento -$C_w v^2$. Trayectorias casi parabólicas con rozamiento proporcional al cuadrado de la velocidad, para cinco valores diferentes de la velocidad horizontal β = 1,5, β = 2,5, β = 3,5 y β = 1,5, desde una altura *h* = 7δ

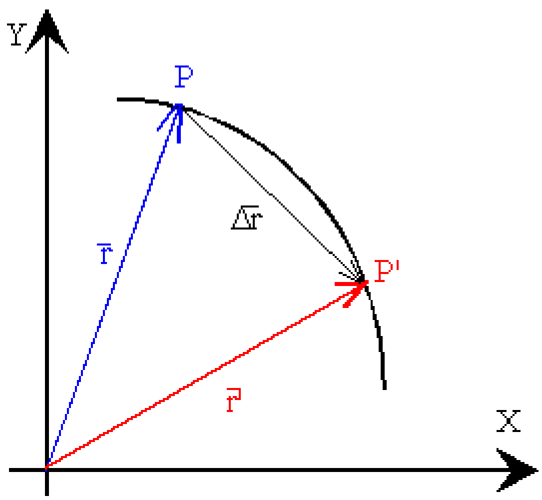
Caída libre desde grandes distancias: cónicas

La caída libre desde grandes alturas en un campo gravitatorio aproximadamente esférico, como es el caso de la Tierra requiere correcciones importantes ya que en ese caso ni la dirección ni la magnitud de la fuerza gravitatoria es constante. Concretamente para un campo gravitatorio newtoniano con simetría esférica la trayectoria es un arco elipse, cuando podemos ignorar el rozamiento con la atmósfera.

1.3 MOVIMIENTO CURVILÍNEO

Supongamos que el movimiento tiene lugar en el plano XY, Situamos un origen, y unos ejes, y representamos la trayectoria del móvil, es decir, el conjunto de puntos por los que pasa el móvil. Las magnitudes que describen un movimiento curvilíneo son:

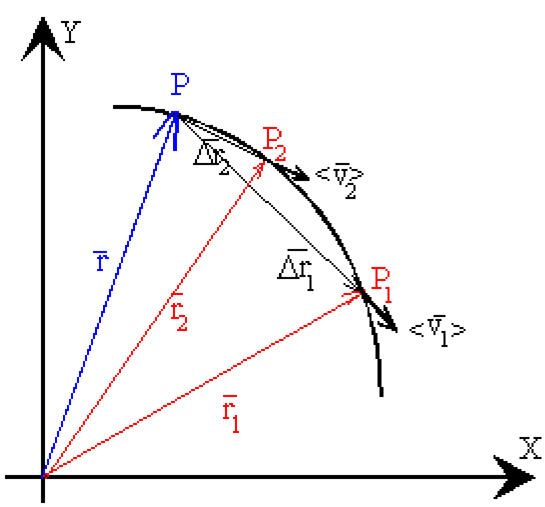
Vector posición r en un instante *t*.



Como la posición del móvil cambia con el tiempo. En el instante *t,* el móvil se encuentra en el punto P, o en otras palabras, su vector posición es **r** y en el instante *t'* se encuentra en el punto P', su posición viene dada por el vector **r**'.

Diremos que el móvil se ha desplazado $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}'-\mathbf{r}$ en el intervalo de tiempo $\Delta t=t'-t$. Dicho vector tiene la dirección de la secante que une los puntos P y P'.

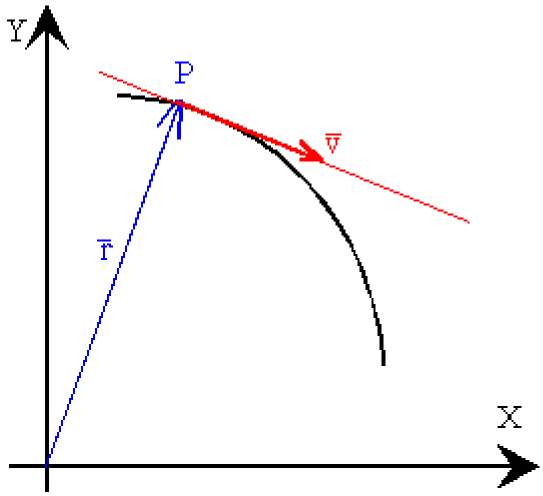
Vector velocidad



El vector velocidad media, se define como el cociente entre el vector desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$ y el tiempo que ha empleado en desplazarse Δt.

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{t'-t} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

El vector velocidad media tiene la misma dirección que el vector desplazamiento, la secante que une los puntos P y P_1 cuando se calcula la velocidad media $\langle\mathbf{v}_1\rangle$ entre los instantes t y t_1.



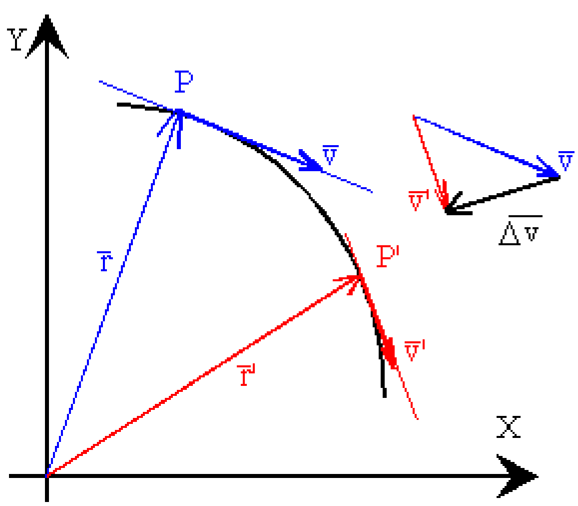
El vector velocidad en un instante, es el límite del vector velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Como podemos ver en la figura, a medida que hacemos tender el intervalo de tiempo a cero, la dirección del vector velocidad media, la recta secante que une sucesivamente los puntos P, con los puntos P_1, P_2....., tiende hacia la tangente a la trayectoria en el punto P.

En el instante *t*, el móvil se encuentra en P y tiene una velocidad **v** cuya dirección es tangente a la trayectoria en dicho punto.

Vector aceleración



En el instante *t* el móvil se encuentra en P y tiene una velocidad **v** cuya dirección es tangente a la trayectoria en dicho punto.

En el instante *t'* el móvil se encuentra en el punto P' y tiene una velocidad **v**'.

El móvil ha cambiado, en general, su velocidad tanto en módulo como en dirección, en la cantidad dada por el vector diferencia Δ**v=v'-v**.

Se define la aceleración media como el cociente entre el vector cambio de velocidad Δ**v** y el intervalo de tiempo Δ*t*=*t'*-*t*, en el que tiene lugar dicho cambio.

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{\mathbf{v}' - \mathbf{v}}{t' - t} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

Y la aceleración **a** en un instante

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Resumiendo, las ecuaciones del movimiento curvilíneo en el plano XY son

$$x = x(t) \qquad v_x = \frac{dx}{dt} \qquad a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$y = y(t) \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

La primera fila corresponde, a las ecuaciones de un movimiento rectilíneo a lo largo del eje X, la segunda fila corresponde, a las ecuaciones de un movimiento rectilíneo a lo largo del eje Y, y lo mismo podemos decir respecto del eje Z.

Por tanto, podemos considerar un movimiento curvilíneo como la composición de movimientos rectilíneos a lo largo de los ejes coordenados.

Ejemplo 13.1: Un automóvil describe una curva plana tal que sus coordenadas rectangulares, en función del tiempo están dadas por las expresiones: $x=2t^3-3t^2$, $y=t^2-2t+1$ m. Calcular:

- Las componentes de la velocidad en cualquier instante.

$$v_x=6t^2-6t \text{ m/s}$$
$$v_y=2t-2 \text{ m/s}$$

- Las componentes de la aceleración en cualquier instante.

$$a_x=12t \text{ m/s}^2$$
$$a_y=2 \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 13.2: Un punto se mueve en el plano de tal forma que las componentes rectangulares de la velocidad en función del tiempo vienen dadas por las expresiones: $v_x=4t^3+4t$, $v_y=4t$ m/s. Si en el instante inicial $t_0=0$ s, el móvil se encontraba en la posición $x_0=1$, $y_0=2$ m. Calcular:

- Las componentes de la aceleración en cualquier instante

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 12t^2 + 4 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 4 \text{ m/s}^2$$

- Las coordenadas *x* e *y*, del móvil, en función del tiempo.

Dada la velocidad $v_x=4t^3+4t$ del móvil, el desplazamiento *x*-1 entre los instantes 0 y *t* se calcula mediante la integral

$$x - 1 = \int_0^t \left(4t^3 + 4t\right) dt$$

$$x=t^4+2t^2+1 \text{ m}$$

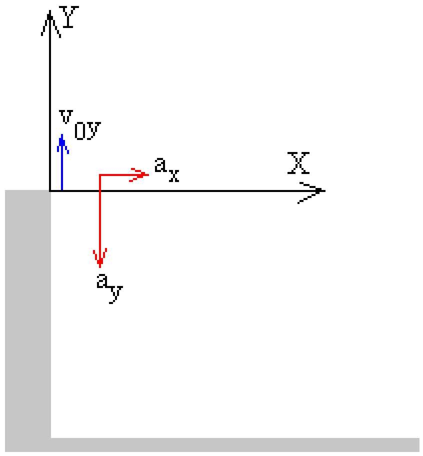
Dada la velocidad $v_y=4t$ del móvil, el desplazamiento *y*-2 entre los instantes 0 y *t* se calcula mediante la integral

$$y - 2 = \int_0^t (4t)\,dt$$

$$y=2t^2+2 \text{ m}$$

Ejemplo 13.3: Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s desde la azotea de un edificio de 50 m de altura. La pelota además es empujada por el viento, produciendo un movimiento horizontal con una aceleración de 2 m/s^2. Calcular:

- La distancia horizontal entre el punto de lanzamiento y de impacto
- La altura máxima
- Los instantes y los valores de las componentes de la velocidad cuando la pelota se encuentra a 60 m de altura sobre el suelo.



1. Primero, se establece el origen en el punto del lanzamiento y los ejes X e Y apuntando hacia arriba.
2. Se determinan los signos de las velocidades iníciales v_{0x}=0 y v_{0y}=20 y de la aceleración a_y=-10.
3. Se escriben las ecuaciones del movimiento

- Movimiento uniformemente acelerado a lo largo del eje X

$$a_x=2$$
$$v_x=2t$$
$$x=2t^2/2$$

- Movimiento uniformemente acelerado a lo largo del eje Y (movimiento de caída de los cuerpos)

$$a_y=-10$$
$$v_y=20+(-10)t$$
$$y=20t+(-10)t^2/2$$

1. El punto de impacto tiene de coordenadas x desconocida e y=-50 m. Dado y se obtiene el valor de t y luego el valor de x.

$$y=-50 \text{ m}$$
$$t=1.74 \text{ s}$$
$$x=3.03 \text{ m}$$

2. La altura máxima se obtiene cuando la velocidad vertical es cero

$$v_y=0 \text{ m/s}$$
$$t=2 \text{ s}$$
$$y=20 \text{ m}$$

La altura desde el suelo es 20+50=70 m.

3. El móvil se encuentra en dos instantes a 60 m de altura sobre el suelo (10 sobre el origen), ya que su trayectoria corta en dos puntos a la recta horizontal y=10 m. La ecuación de segundo grado tiene dos raíces

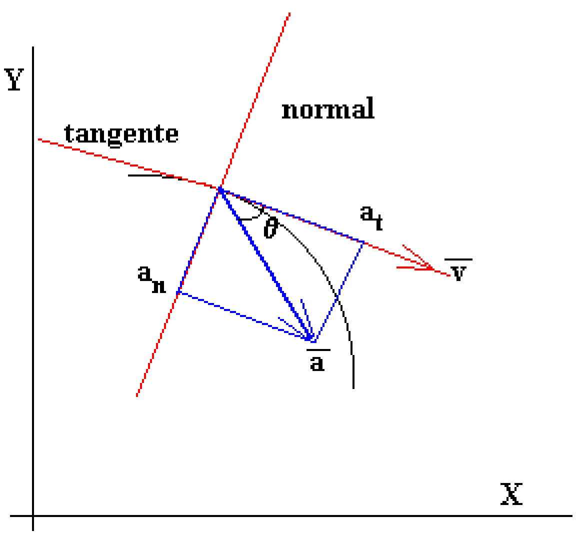
$$10=20t+(-10)t^2/2$$
$$t_1=0.59 \text{ s y } t_2=3.41 \text{ s.}$$

1.3.1. COMPONENTES RECTANGULARES DE LA VELOCIDAD Y ACELERACIÓN.

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Las componentes rectangulares de la aceleración no tienen significado físico, pero si lo tienen las componentes de la aceleración en un nuevo sistema de referencia formado por la tangente a la trayectoria y la normal a la misma.

Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración en un determinado instante es un simple problema de geometría, tal como se ve en la figura.



- Se dibujan los ejes horizontal X y vertical Y.
- Se calculan las componentes rectangulares de la velocidad y de la aceleración en dicho instante. Se representan los vectores velocidad y aceleración en dicho sistema de referencia.
- Se dibujan los nuevos ejes, la dirección tangencial es la misma que la dirección de la velocidad, la dirección normal es perpendicular a la dirección tangencial.
- Con la regla y el color se proyecta el vector aceleración sobre la dirección tangencial y sobre la dirección normal.
- Se determina el ángulo θ entre el vector velocidad y el vector aceleración, y se calcula el valor numérico de dichas componentes: $a_t=a\cos\theta$ y $a_n=a$ senθ

Ejemplo 131.1.- El vector velocidad del movimiento de una partícula viene dado por **v**=(3t-2)**i**+(6t^2-5)**j** m/s**.** Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante t=2 s. Dibujar el vector velocidad, el vector aceleración y las componentes tangencial y normal en dicho instante.

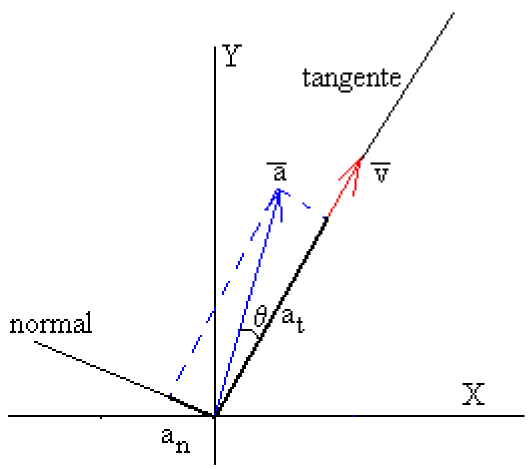
1. Dadas las componentes de la velocidad obtenemos las componentes de la aceleración

v_x =3t-2 m/s, a_x=3 m/s^2
v_y=6t^2-5 m/s, a_y=12t m/s^2

2. Los valores de dichas componentes en el instante t=2 s son

v_x =4 m/s, a_x=3 m/s^2
v_y=19 m/s, a_y=24 m/s^2

3. Dibujamos el vector velocidad y el vector aceleración



4. Calculamos el ángulo θ que forman el vector velocidad y el vector aceleración

- Por el producto escalar: **v**·**a**=v·a·cosθ
- Calculando el ángulo que forma cada vector con el eje X, y restando ambos ángulos

5. Se calculan las componentes tangencial y normal de la aceleración
6. a_t=a·cosθ =24.1 m/s^2
   a_n=a·senθ=2.0 m/s^2

7. Podemos hallar la aceleración tangencial en cualquier instante, a partir del producto escalar del vector aceleración **a** y el vector velocidad **v**.

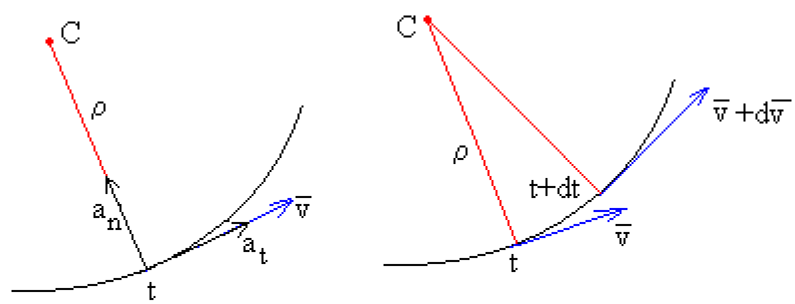
8. **v·a**=*va*·cos*θ*=*v*·a_t

9. $$a_t = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

10. a_t=*a*·cos*θ* =24.1 m/s^2
    a_n=*a*·sen*θ*=2.0 m/s^2
11. Podemos hallar la aceleración tangencial en cualquier instante, a partir del producto escalar del vector aceleración **a** y el vector velocidad **v**.
12. **v·a**=*va*·cos*θ*=*v*·a_t

$$a_t = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

Radio de curvatura



En la figura 131-1, se muestra el radio de curvatura y el centro de curvatura de una trayectoria cualesquiera en el instante *t*. Se dibuja la dirección del vector velocidad **v** en el instante *t*, la dirección del vector velocidad **v**+**dv** en el instante *t*+*dt*. Se trazan rectas perpendiculares a ambas direcciones, que se encuentran en el punto C denominado centro de curvatura. La distancia ente entre la posición del móvil en el instante *t*, y el centro de curvatura *C* es el radio de curvatura *ρ*.

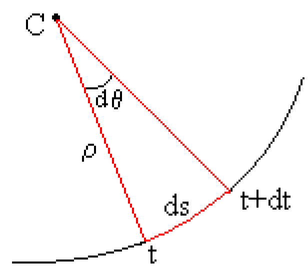


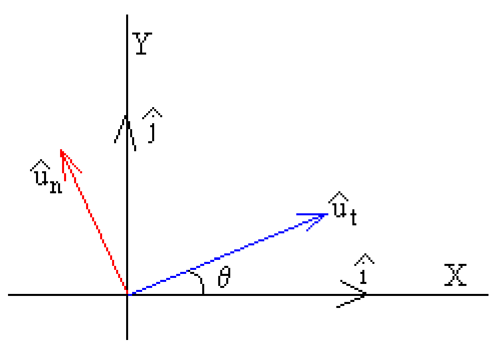
Figura 131-1

En el intervalo de tiempo comprendido entre *t* y *t+dt,* la dirección del vector velocidad cambia un ángulo $d\theta$. que es el ángulo entre las tangentes o entre las normales. El móvil se desplaza en este intervalo de tiempo un arco $ds=\rho\cdot d\theta$, tal como se aprecia en la figura 131-1.

Otra forma de obtener las componentes tangencial y normal de la aceleración, es la de escribir el vector velocidad **v** como producto de su módulo *v* por un vector unitario que tenga su misma dirección y sentido $\mathbf{u_t}=\mathbf{v}/v$. La derivada de un producto se compone de la suma de dos términos

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d(v\cdot\mathbf{u_t})}{dt}=\frac{dv}{dt}\mathbf{u_t}+v\frac{d\mathbf{u_t}}{dt}$$

El primer término, tiene la dirección de la velocidad o del vector unitario $\mathbf{u_t}$, es la componente tangencial de la aceleración-



El segundo término, vamos a demostrar que tiene la dirección normal $\mathbf{u_n}$. Como vemos en la figura las componentes del vector unitario $\mathbf{u_t}$ son

$$\mathbf{u_t}=\cos\theta\cdot\mathbf{i}+\operatorname{sen}\theta\cdot\mathbf{j}$$

Su derivada es

$$\frac{d\mathbf{u_t}}{dt} = \left(-\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{u_n} = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt}\mathbf{u_n} = \frac{v}{\rho}\mathbf{u_n}$$

El vector aceleración es

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u_t} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{u_n}$$

Las componentes tangencial y normal de la aceleración valen, respectivamente

$$a_t = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Esta última fórmula, la obtuvimos de una forma más simple para una partícula que describía un movimiento circular uniforme.

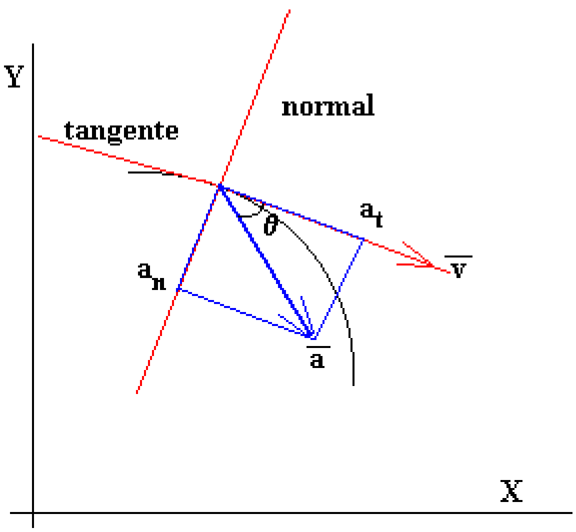
Como la velocidad es un vector, y un vector tiene módulo y dirección. Existirá aceleración siempre que cambie con el tiempo bien el módulo de la velocidad, la dirección de la velocidad o ambas cosas a la vez.

- Si solamente cambia el módulo de la velocidad con el tiempo, como en un movimiento rectilíneo, tenemos únicamente aceleración tangencial.
- Si solamente cambia la dirección de la velocidad con el tiempo, pero su módulo permanece constante como en un movimiento circular uniforme, tenemos únicamente aceleración normal.
- Si cambia el módulo y la dirección de la velocidad con el tiempo, como en un tiro parabólico, tendremos aceleración tangencial y aceleración normal.

1.3.3. COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL DE LA VELOCIDAD Y LA ACELERACIÓN

Las componentes rectangulares de la aceleración no tienen significado físico, pero si lo tienen las componentes de la aceleración en un nuevo sistema de referencia formado por la tangente a la trayectoria y la normal a la misma.

Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración en un determinado instante es un simple problema de geometría, tal como se ve en la figura.



- Se dibujan los ejes horizontal X y vertical Y.
- Se calculan las componentes rectangulares de la velocidad y de la aceleración en dicho instante. Se representan los vectores velocidad y aceleración en dicho sistema de referencia.
- Se dibujan los nuevos ejes, la dirección tangencial es la misma que la dirección de la velocidad, la dirección normal es perpendicular a la dirección tangencial.
- Con la regla y el color se proyecta el vector aceleración sobre la dirección tangencial y sobre la dirección normal.
- Se determina el ángulo θ entre el vector velocidad y el vector aceleración, y se calcula el valor numérico de dichas componentes: $a_t=a \cos\theta$ y $a_n=a \operatorname{sen}\theta$

Ejemplo 131.1.- El vector velocidad del movimiento de una partícula viene dado por **v**=(3t-2)**i**+(6t^2-5)**j** m/s**.** Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante t=2 s. Dibujar el vector velocidad, el vector aceleración y las componentes tangencial y normal en dicho instante.

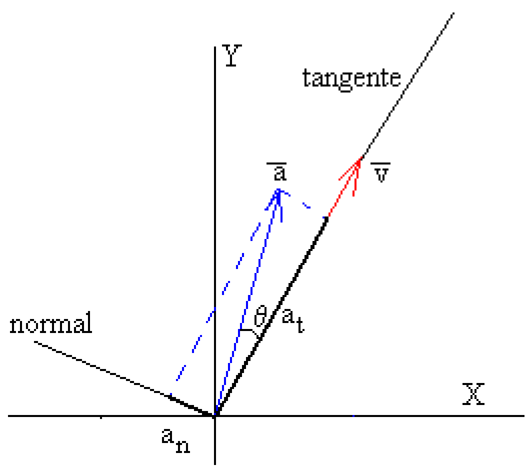
1. Dadas las componentes de la velocidad obtenemos las componentes de la aceleración

v_x =3t-2 m/s, a_x=3 m/s^2
v_y=6t^2-5 m/s, a_y=12t m/s^2

2. Los valores de dichas componentes en el instante t=2 s son

v_x =4 m/s, a_x=3 m/s^2
v_y=19 m/s, a_y=24 m/s^2

3. Dibujamos el vector velocidad y el vector aceleración



4. Calculamos el ángulo θ que forman el vector velocidad y el vector aceleración

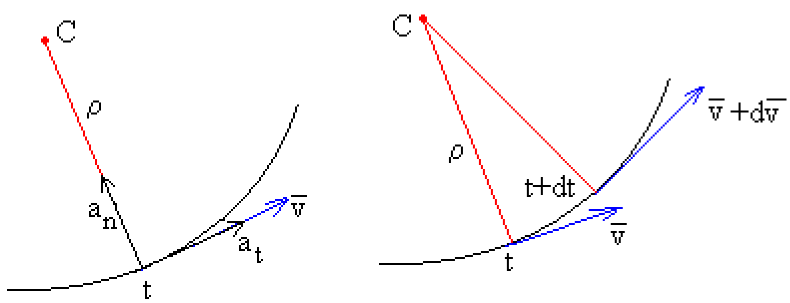
- Por el producto escalar: **v**·**a**=v·a·cosθ
- Calculando el ángulo que forma cada vector con el eje X, y restando ambos ángulos

5. Se calculan las componentes tangencial y normal de la aceleración
6. a_t=a·cosθ =24.1 m/s^2
   a_n=a·senθ=2.0 m/s^2
7. Podemos hallar la aceleración tangencial en cualquier instante, a partir del producto escalar del vector aceleración **a** y el vector velocidad **v**.

8. **v·a**=va·cosθ=v·a_t
9. $$a_t=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v}=\frac{v_x a_x+v_y a_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}$$
10. a_t=a·cosθ =24.1 m/s^2
    a_n=a·senθ=2.0 m/s^2
11. Podemos hallar la aceleración tangencial en cualquier instante, a partir del producto escalar del vector aceleración **a** y el vector velocidad **v**.
12. **v·a**=va·cosθ=v·a_t

$$a_t=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v}=\frac{v_x a_x+v_y a_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}$$

Radio de curvatura



En la figura 131-1, se muestra el radio de curvatura y el centro de curvatura de una trayectoria cualesquiera en el instante *t*. Se dibuja la dirección del vector velocidad **v** en el instante *t*, la dirección del vector velocidad **v**+**dv** en el instante *t*+*dt*. Se trazan rectas perpendiculares a ambas direcciones, que se encuentran en el punto C denominado centro de curvatura. La distancia ente entre la posición del móvil en el instante *t*, y el centro de curvatura *C* es el radio de curvatura *ρ*.

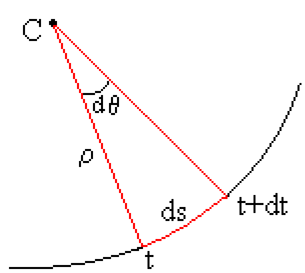


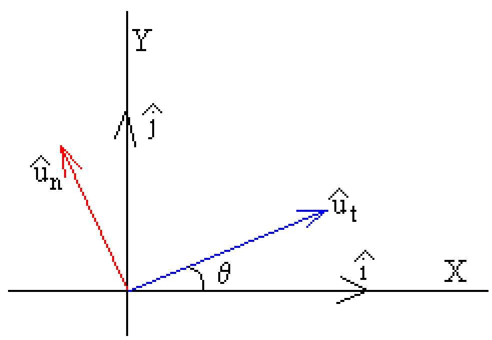
Figura 131-1

En el intervalo de tiempo comprendido entre *t* y *t+dt,* la dirección del vector velocidad cambia un ángulo $d\theta$. que es el ángulo entre las tangentes o entre las normales. El móvil se desplaza en este intervalo de tiempo un arco $ds=\rho\cdot d\theta$, tal como se aprecia en la figura 131-1.

Otra forma de obtener las componentes tangencial y normal de la aceleración, es la de escribir el vector velocidad **v** como producto de su módulo *v* por un vector unitario que tenga su misma dirección y sentido $\mathbf{u_t}=\mathbf{v}/v$. La derivada de un producto se compone de la suma de dos términos

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d(v\cdot\mathbf{u_t})}{dt}=\frac{dv}{dt}\mathbf{u_t}+v\frac{d\mathbf{u_t}}{dt}$$

El primer término, tiene la dirección de la velocidad o del vector unitario $\mathbf{u_t}$, es la componente tangencial de la aceleración-



El segundo término, vamos a demostrar que tiene la dirección normal $\mathbf{u_n}$. Como vemos en la figura las componentes del vector unitario $\mathbf{u_t}$ son

$$\mathbf{u_t}=\cos\theta\cdot\mathbf{i}+\operatorname{sen}\theta\cdot\mathbf{j}$$

Su derivada es

$$\frac{d\mathbf{u_t}}{dt}=\left(-\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i}+\cos\theta\,\mathbf{j}\right)\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u_n}=\frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt}\mathbf{u_n}=\frac{v}{\rho}\mathbf{u_n}$$

El vector aceleración es

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\mathbf{u_t}+\frac{v^2}{\rho}\mathbf{u_n}$$

Las componentes tangencial y normal de la aceleración valen, respectivamente

$$a_t = \frac{dv}{dt} \qquad\qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Esta última fórmula, la obtuvimos de una forma más simple para una partícula que describía un movimiento circular uniforme.

Como la velocidad es un vector, y un vector tiene módulo y dirección. Existirá aceleración siempre que cambie con el tiempo bien el módulo de la velocidad, la dirección de la velocidad o ambas cosas a la vez.

- Si solamente cambia el módulo de la velocidad con el tiempo, como en un movimiento rectilíneo, tenemos únicamente aceleración tangencial.
- Si solamente cambia la dirección de la velocidad con el tiempo, pero su módulo permanece constante como en un movimiento circular uniforme, tenemos únicamente aceleración normal.
- Si cambia el módulo y la dirección de la velocidad con el tiempo, como en un tiro parabólico, tendremos aceleración tangencial y aceleración normal.

1.3.4 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME Y NO UNIFORME

El **movimiento circular uniforme** es aquel movimiento circular en el que un cuerpo se desplaza alrededor de un punto central, siguiendo la trayectoria de una circunferencia, de tal manera que en tiempos iguales recorra espacios iguales. No se puede decir que la velocidad es constante ya que, al ser una magnitud vectorial, tiene módulo, dirección y sentido: el módulo de la velocidad permanece constante durante todo el movimiento pero la dirección está constantemente cambiando, siendo en todo momento tangente a la trayectoria circular. Esto implica la presencia de una aceleración que, si bien en este caso no varía al módulo de la velocidad, sí varía su dirección.

Desplazamiento angular y velocidad angular

El desplazamiento angular es la longitud del arco de circunferencia por unidad de radio

$$\varphi = \frac{arco}{radio}$$

La longitud del arco y el radio de la circunferencia son magnitudes de longitud, por lo que el desplazamiento angular es una magnitud adimensional, llamada radián. Un radián es un arco de circunferencia de longitud igual al radio de la circunferencia, y la circunferencia completa tiene 2π radianes.

La velocidad angular es la variación del desplazamiento angular por unidad de tiempo:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Partiendo de estos conceptos se estudian las condiciones del movimiento circular uniforme, en cuanto a su trayectoria y espacio recorrido, velocidad y aceleración, según el modelo físico cinemático.

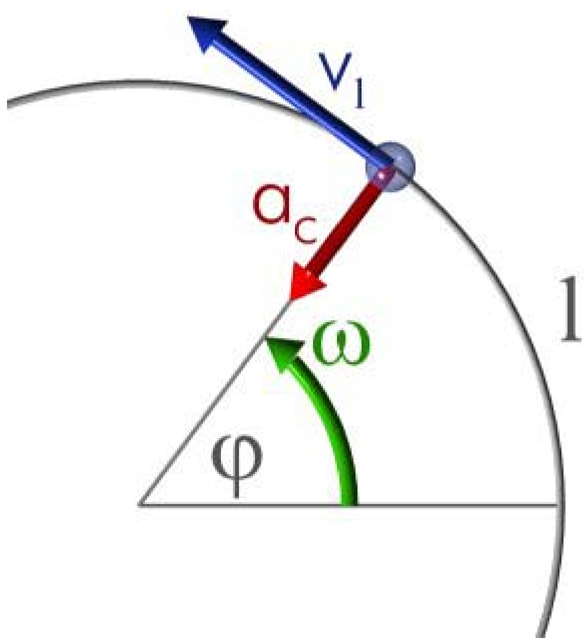
Sistema de referencia

Se considera un sistema de referencia en el plano XY, con vectores unitarios en el sentido de estos ejes $(O;\hat{i},\hat{j})$, que es un sistema inercial. Sin pérdida de la generalidad, se toma el centro de giro del movimiento en el origen de coordenadas.

Se toma un segundo sistema de referencia $(O;\hat{u}_r,\hat{u}_t)$, con el mismo centro de coordenadas, un eje radial que partiendo del centro de coordenadas pasa en todo momento por la posición de la partícula y un eje tangencial que pasando por el centro de coordenadas, es perpendicular al eje radial, cuando el ángulo de giro es cero, el eje *x* coincide con el radial y el eje *y* con el tangencial y para un ángulo φ dado, se cumple:

$$\hat{i} = Cos(\varphi)\hat{u}_r - Sen(\varphi)\hat{u}_t$$
$$\hat{j} = Sen(\varphi)\hat{u}_r + Cos(\varphi)\hat{u}_t$$

Trayectoria o vector de posición



La posición de la partícula en función del ángulo de giro φ y del radio **r** es en un sistema de referencia cartesiano *xy*:

$$x = rCos(\varphi)$$
$$y = rSen(\varphi)$$

El vector de posición de la partícula será:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

Al ser un movimiento uniforme, a incrementos de tiempo iguales le corresponden desplazamientos iguales, lo que se traduce en:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

Esto es:

$$\varphi = \omega t$$

Según todo lo anterior el vector de posición de la partícula en función del tiempo es:

$$\vec{r} = rCos(\omega t)\hat{i} + rSen(\omega t)\hat{j}$$

donde:

$\vec{r}$: es el vector de posición de la partícula.
r: es el radio de giro.
ω: es la velocidad angular, que es constante en este caso.
t: es el tiempo.

Partiendo del vector de posición en el sistema xy, vamos a pasarlo al sistema de coordenadas de versores: $\hat{u}_r,\ \hat{u}_t$, de tal modo que veamos sus componentes en estas coordenadas, la conclusión es muy sencilla y con un poco de ingenio podíamos llegar a ella sin realizar los operaciones, pero hagámoslo de un modo sistemático, por sustitución de los versores de un sistema por los del otro, partimos del vector posición:

$$\vec{r} = rCos(\omega t)\hat{i} + rSen(\omega t)\hat{j}$$

Simplificando:

$$\vec{r} = r\hat{u}_r$$

Llegando a la conclusión de que el vector de posición tiene por coordenada el valor del radio, según el vector radial, y no tiene componente tangencial, como ya se ha dicho en un principio esta conclusión es obvia, y por propia intuición se podía haber visto sin realizar los cálculos, pero con este mismo método calcularemos la velocidad y la aceleración y veremos que las conclusiones no son tan evidentes.

Velocidad

Partiendo del vector de posición y de la definición de velocidad:

1. $\vec{r} = rCos(\omega t)\hat{i} + rSen(\omega t)\hat{j}$
2. $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

tenemos:

$$\vec{V} = \frac{d}{dt}(rCos(\omega t)\hat{i} + rSen(\omega t)\hat{j})$$

Realizando la derivada:

$$\vec{V} = -r\omega Sen(\omega t)\hat{i} + r\omega Cos(\omega t)\hat{j}$$

Éste es el vector velocidad, vamos a cambiar de sistemas de coordenadas para conseguir sus componentes según el sistema radial tangencial:

$$\vec{V} = r\omega\hat{u}_t$$

La conclusión es que la velocidad no tiene componente radial y su componente tangencial tiene por módulo el producto del radio por la velocidad angular, lo que podríamos representar:

$$|\vec{V}| = V = r\omega$$

Aceleración

Del mismo modo que hemos calculado el vector posición y velocidad, podemos calcular la aceleración, para ello partiremos del vector velocidad y de la definición de aceleración:

1. $\vec{V} = -r\omega Sen(\omega t)\hat{\imath} + r\omega Cos(\omega t)\hat{\jmath}$
2. $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$

Con lo que tenemos:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(-r\omega Sen(\omega t)\hat{\imath} + r\omega Cos(\omega t)\hat{\jmath})$$

haciendo la derivada:

$$\vec{a} = -r\omega^2 Cos(\omega t)\hat{\imath} - r\omega^2 Sen(\omega t)\hat{\jmath}$$

Podríamos sustituir los vectores como en el caso de la velocidad para conseguir las componentes radial y tangencial de la aceleración, pero hay una forma más ingeniosa, partiendo del vector posición, sabiendo que:

$$\vec{r} = rCos(\omega t)\hat{\imath} + rSen(\omega t)\hat{\jmath}$$
$$\vec{r} = r\hat{u}_r$$

la aceleración es:

$$\vec{a} = -r\omega^2 Cos(\omega t)\hat{\imath} - r\omega^2 Sen(\omega t)\hat{\jmath}.$$

esto es:

$$\vec{a} = -\omega^2[rCos(\omega t)\hat{\imath} + rSen(\omega t)\hat{\jmath}]$$

La expresión entre corchetes es el vector posición, sustituyéndolo:

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$$

esto es:

$$\vec{a} = -\omega^2 r\hat{u}_r$$

Aplicando el método general habríamos llegado a la misma conclusión, la aceleración no tiene componente tangencial, solo tiene componente radial, el sentido de la aceleración es el contrario del vector posición, apuntando hacia el centro de giro, y su módulo es el cuadrado de la velocidad angular por el radio de giro. Esta aceleración es la sufrida por la partícula cuando gira a velocidad constante, una partícula que lleve un movimiento circular uniforme tiene que estar sometida a una fuerza centrípeta que impide que lleve una trayectoria lineal, como correspondería por la ley de inercia. La fuerza que hace que la partícula tienda a continuar un movimiento rectilíneo, en lugar de hacer el giro con un radio dado, es la fuerza centrifuga, antagonista con la centrípeta que tiene que compensar.

Partiendo de la expresión del módulo de la velocidad tangencial:

$$|\vec{V}| = V = r\omega$$

despejando ω, tenemos:

$$\omega = \frac{V}{r}$$

Partiendo de esta expresión y la de la aceleración:

1. $a = \omega^2 r$
2. $\omega = \frac{V}{r}$

tenemos que:

$$a = \frac{V^2}{r^2} r$$

simplificando:

$$a = \frac{V^2}{r}$$

La aceleración centrífuga sufrida al realizar un giro es proporcional al cuadrado de la velocidad tangencial e inversamente proporcional al radio de giro, si doblamos la velocidad en un giro la fuerza centrífuga se multiplica por cuatro, si el radio de giro es el doble la fuerza centrífuga de reduce a la mitad, esta proporción es válida también para vehículos que describen una curva o realizan un giro.

Período y frecuencia

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad (7)$$

donde:

T: representa al periodo

π: representa al número Pi.

ω: representa la velocidad angular.

La frecuencia es una magnitud que mide el número de revoluciones por unidad de tiempo. Se mide en hertzios (Hz). Responde a la fórmula:

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \quad (8)$$

f: representa a la frecuencia.

π: representa al número Pi.

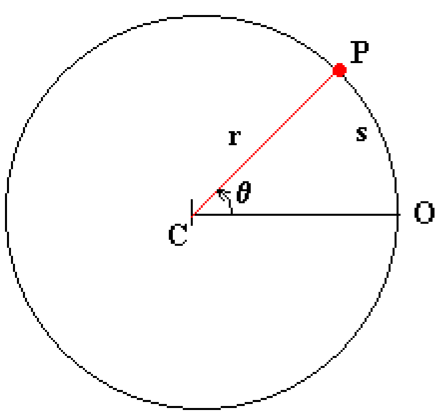
ω: representa la velocidad angular.

Al ser la frecuencia la inversa del período también se puede calcular mediante la fórmula:

$$f = \frac{1}{T} \quad (9)$$

En esta sección, vamos a definir las magnitudes características de un movimiento circular, análogas a las ya definidas para el movimiento rectilíneo.

Se define movimiento circular como aquél cuya trayectoria es una circunferencia. Una vez situado el origen O de ángulos describimos el movimiento circular mediante las siguientes magnitudes.

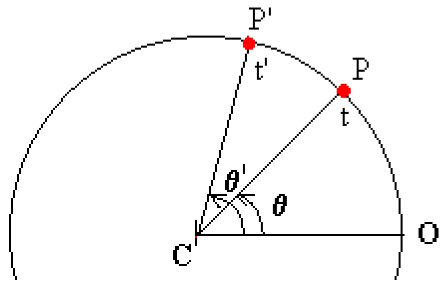


Posición angular, θ

En el instante *t* el móvil se encuentra en el punto P. Su posición angular viene dada por el ángulo θ, que hace el punto P, el centro de la circunferencia C y el origen de ángulos O.

El ángulo θ, es el cociente entre la longitud del arco *s* y el radio de la circunferencia *r*, $\theta = s/r$. La posición angular es el cociente entre dos longitudes y por tanto, no tiene dimensiones.

Velocidad angular, ω



En el instante t' el móvil se encontrará en la posición P' dada por el ángulo θ'. El móvil se habrá desplazado $\Delta\theta=\theta'-\theta$ en el intervalo de tiempo $\Delta t=t'-t$ comprendido entre t y t'.

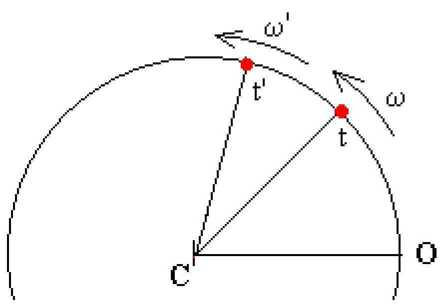
Se denomina velocidad angular media al cociente entre el desplazamiento y el tiempo.

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Como ya se explicó en el movimiento rectilíneo, la velocidad angular en un instante se obtiene calculando la velocidad angular media en un intervalo de tiempo que tiende a cero.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Aceleración angular, α



Si en el instante t la velocidad angular del móvil es ω y en el instante t' la velocidad angular del móvil es ω'. La velocidad angular del móvil ha cambiado $\Delta\omega=\omega'-\omega$ en el intervalo de tiempo $\Delta t=t'-t$ comprendido entre t y t'.

Se denomina aceleración angular media al cociente entre el cambio de velocidad angular y el intervalo de tiempo que tarda en efectuar dicho cambio.

$$\langle \alpha \rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

La aceleración angular en un instante, se obtiene calculando la aceleración angular media en un intervalo de tiempo que tiende a cero.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

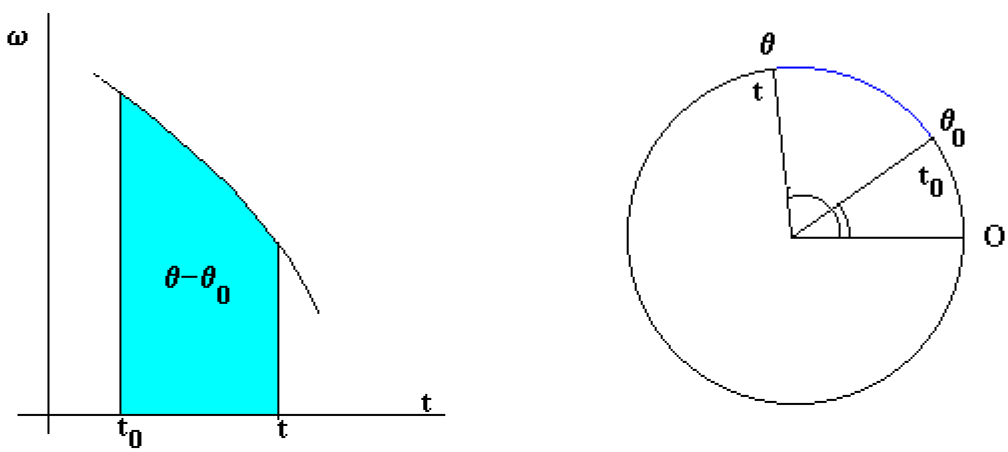
Dada la velocidad angular, hallar el desplazamiento angular

Si conocemos un registro de la velocidad angular del móvil podemos calcular su desplazamiento $\theta - \theta_0$ entre los instantes t_0 y t, mediante la integral definida.

$$\theta - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} \omega dt$$

El producto $\omega\, dt$ representa el desplazamiento angular del móvil entre los instantes t y $t+dt$, o en el intervalo dt. El desplazamiento total es la suma de los infinitos desplazamientos angulares infinitesimales entre los instantes t_0 y t.

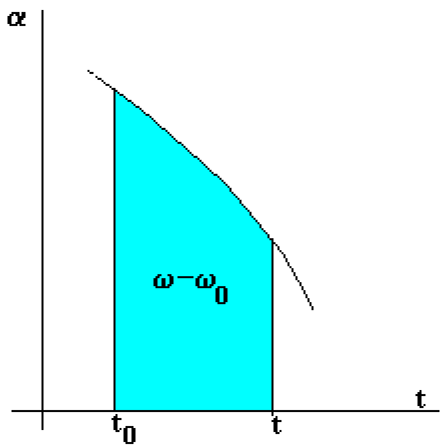
En la figura, se muestra una gráfica de la velocidad angular en función del tiempo, el área en color azul mide el desplazamiento angular total del móvil entre los instantes t_0 y t, el arco en color azul marcado en la circunferencia.



Hallamos la posición angular θ del móvil en el instante t, sumando la posición inicial θ_0 al desplazamiento, calculado mediante la medida del área bajo la curva ω-t o mediante cálculo de la integral definida en la fórmula anterior.

Dada la aceleración angular, hallar el cambio de velocidad angular

Del mismo modo que hemos calculado el desplazamiento angular del móvil entre los instantes t_0 y t, a partir de un registro de la velocidad angular ω en función del tiempo t, podemos calcular el cambio de velocidad $\omega - \omega_0$ que experimenta el móvil entre dichos instantes, a partir de una gráfica de la aceleración angular en función del tiempo.



En la figura, el cambio de velocidad $\omega - \omega_0$ es el área bajo la curva α - t, o el valor numérico de la integral definida en la fórmula anterior.

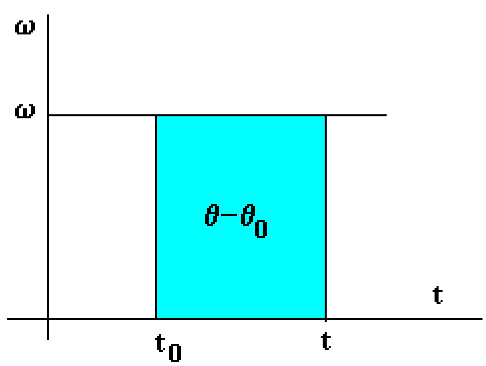
Conociendo el cambio de velocidad angular $\omega - \omega_0$, y el valor inicial ω_0 en el instante inicial t_0, podemos calcular la velocidad angular ω en el instante t.

Resumiendo, las fórmulas empleadas para resolver problemas de movimiento circular son similares a las del movimiento rectilíneo.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\theta - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} \omega \, dt \qquad \omega - \omega_0 = \int_{t_0}^{t} \alpha \, dt$$

Movimiento circular uniforme



Un movimiento circular uniforme es aquél cuya velocidad angular ω es constante, por tanto, la aceleración angular es cero. La posición angular θ del móvil en el instante t lo podemos calcular integrando

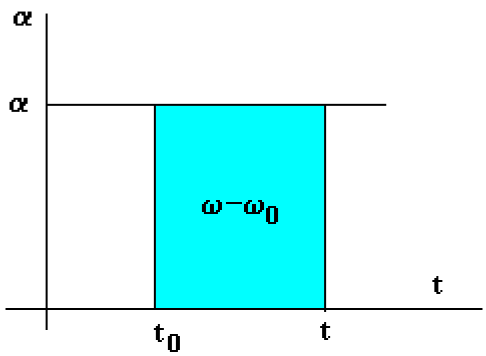
$$\theta - \theta_0 = \omega(t - t_0)$$

o gráficamente, en la representación de ω en función de t.

Habitualmente, el instante inicial t_0 se toma como cero. Las ecuaciones del movimiento circular uniforme son análogas a las del movimiento rectilíneo uniforme

$$\alpha = 0$$
$$\omega = \text{cte}$$
$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

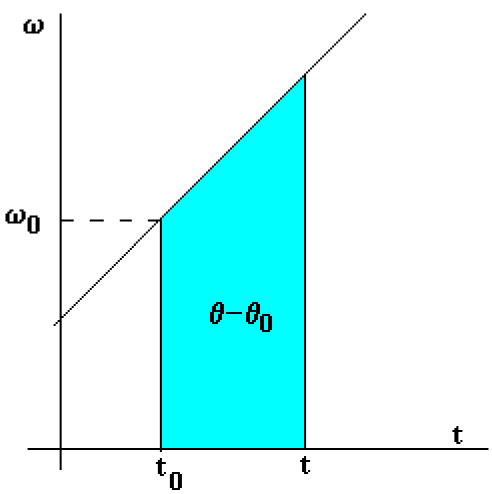
Movimiento circular uniformemente acelerado



Un movimiento circular uniformemente acelerado es aquél cuya aceleración α es constante.

Dada la aceleración angular podemos obtener el cambio de velocidad angular ω-ω_0 entre los instantes t_0 y t, mediante integración, o gráficamente.

$$\omega - \omega_0 = \alpha(t - t_0)$$



Dada la velocidad angular ω en función del tiempo, obtenemos el desplazamiento θ-θ_0 del móvil entre los instantes t_0 y t, gráficamente (área de un rectángulo + área de un triángulo), o integrando

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 (t - t_0) + \tfrac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

Habitualmente, el instante inicial t_0 se toma como cero. Las fórmulas del movimiento circular uniformemente acelerado son análogas a las del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

$$\alpha = \text{cte}$$
$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

Despejando el tiempo t en la segunda ecuación y sustituyéndola en la tercera, relacionamos la velocidad angular ω con el desplazamiento θ-θ_0

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

1.4 MOVIMIENTO DE CUERPO RIGIDO

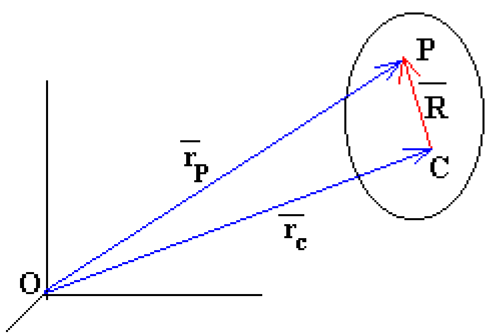
Movimiento general de un sólido rígido

En esta página, se describe el movimiento general de un sólido rígido respecto a un observador inercial O. Un sólido fijo se caracteriza por ser indeformable, las posiciones relativas de los puntos del sólido se mantienen fijas aunque se apliquen fuerzas al mismo.

En la figura vemos que la posición del punto P del sólido es

$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_c + \mathbf{R}$

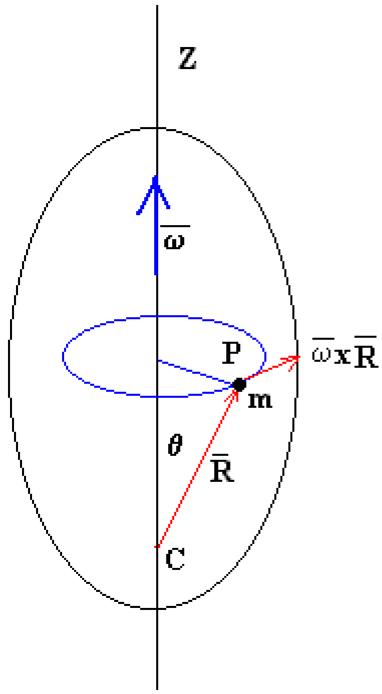
Donde *C* se refiere al centro de masas del sólido. El vector **R** que va del centro de masas al punto P es un vector cuyo módulo es constante.



Derivando la expresión anterior respecto del tiempo obtenemos

$$\frac{d\mathbf{r}_P}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} + \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$
$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$$

El primer término es la velocidad del punto P, el segundo la velocidad del centro de masas y el tercero es la velocidad del punto P respecto del centro de masas.

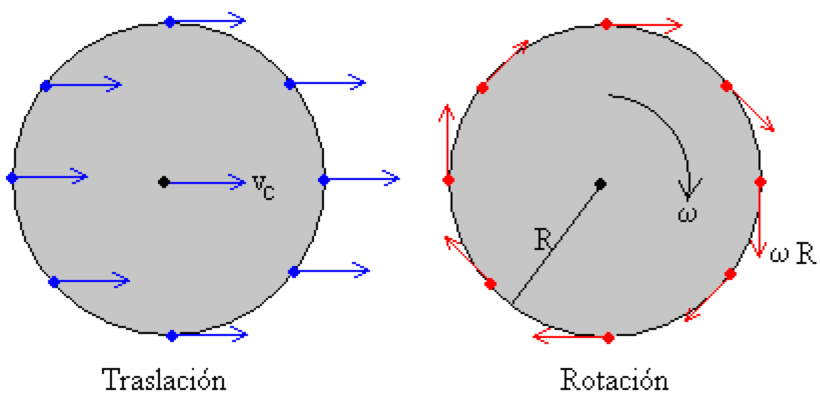


Dado que el vector **R** tiene módulo constante, el único movimiento posible de P respecto de C es una rotación con velocidad angular ω alrededor de un eje instantáneo que pase por C, tal como vemos en la figura.

Así pues, el movimiento de un punto P del sólido lo podemos considerar como la suma de un movimiento de traslación del centro de masas más una rotación alrededor de un eje instantáneo que pasa por el centro de masas.

Movimiento de rodar sin deslizar

El movimiento general de un sólido rígido, es la composición de un movimiento de traslación del centro de masa y de un movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa. En el movimiento de rodar sin deslizar, la rueda se traslada a la vez que gira.



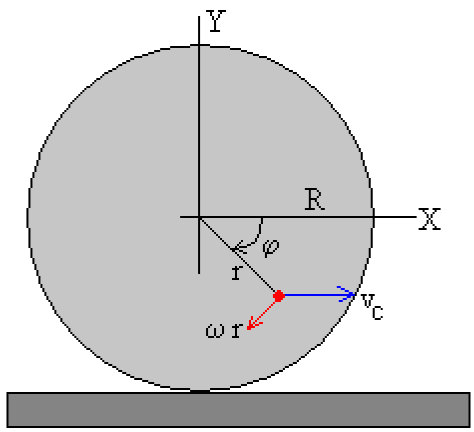
- En el movimiento de traslación, todos los puntos del sólido se mueven en trayectorias paralelas. La velocidad de un punto del sólido es la misma que la velocidad del centro de masas.

- En el movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masas, la velocidad de un punto del sólido es proporcional la radio de la circunferencia que describe, y su dirección es tangente a dicha circunferencia.

En el movimiento de rodar sin deslizar, existe una relación entre el movimiento de rotación y traslación. El punto de la rueda que está en contacto en un instante dado con el suelo tiene velocidad nula. Por tanto, se debe de cumplir que

$v_c = \omega R$

La velocidad de traslación v_c es igual a la velocidad de rotación ω por el radio de la rueda R.



Calculamos la velocidad de cualquier punto P, que dista *r* del centro de una rueda de radio *R*, y que forma un ángulo *φ*, con la horizontal. Los ángulos se miden en sentido de las agujas del reloj, que es el sentido del movimiento de rotación de la rueda.

$$v_x = v_C - \omega r \operatorname{sen}\varphi = v_C\left(1 - \frac{r}{R}\operatorname{sen}\varphi\right)$$

$$v_y = -\omega r \cos\varphi = -v_C \frac{r}{R}\cos\varphi$$

El módulo y el ángulo que forman con el eje horizontal X son, respectivamente

$$v = v_C\sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R}\operatorname{sen}\varphi}$$

$$\tan\theta = -\frac{r\cos\varphi}{R - r\operatorname{sen}\varphi}$$

Ejemplo:

Sea $r=R=1$;

- Cuando $\varphi=\pi/2$, $v=0$
- Cuando $\varphi=\pi$, $v=\sqrt{2}v_C$, $\vartheta=\pi/4$
- Cuando $\varphi=3\pi/2$, $v=2v_c$, $\vartheta=0$

Sea $r=0.5$

- Cuando $\varphi=\pi/2$, $v=0.25$, $\vartheta=0$
- Cuando $\varphi=\pi$, $v=\sqrt{1.25}v_C$, $\vartheta=0.46$ rad=26.6º
- Cuando $\varphi=3\pi/2$, $v=1.5v_c$, $\vartheta=0$

Actividades

Se introduce

- La posición angular φ en grados, actuando en la barra de desplazamiento titulada **Ángulo**. Los ángulos se miden en sentido de las agujas del reloj, que es el sentido del movimiento de rotación de la rueda.
- La distancia r entre el punto P y el centro de la rueda, actuando en la barra de desplazamiento titulada **Distancia**.
- El radio de la rueda se ha fijado en $R=1$ m
- La velocidad del c.m. de la rueda se ha fijado en $v_c=1$ m/s

Se pulsa el botón titulado **Calcula**

En el disco de la izquierda:

- la flecha de color azul representa la velocidad de traslación del centro de masa, v_c.
- la flecha de color rojo representa la velocidad de rotación alrededor de un eje perpendicular al disco y que pasa por su centro ωr.

En el disco de la derecha, una flecha de color negro representa el vector resultante, suma vectorial de ambas velocidades.

En la parte superior del applet, se proporciona el dato de la velocidad resultante v proporcional a v_c y su dirección θ, o ángulo que forma con el eje horizontal X.

Composición de movimientos

En este programa interactivo se trata de comprobar que el movimiento general de un sólido rígido es la composición de un movimiento de traslación del centro de masas y de un movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masas.

Por otra parte, se trata de establecer la relación que debe de existir entre las velocidades de traslación y de rotación para producir un movimiento de rodar sin deslizar.

Se introduce:

- La velocidad angular de rotación, en el control de selección titulado **v. rotación**
- La velocidad de traslación del centro de masas se ha fijado en v_c=1.0
- El radio de la rueda, se ha fijado en R=1.0

Se pulsa el botón titulado **Empieza**

Se representa el perfil de velocidades de diversos puntos de la rueda y en particular, los situados en su diámetro vertical, que son los más importantes para la resolución de los problemas. Podemos observar, que las velocidades de dichos puntos (en color rojo en la figura de abajo) son la suma vectorial de su velocidad de traslación (en color azul en la figura intermedia) y de su velocidad de rotación (en color azul en la figura de arriba).

Como caso particular, se sugiere al lector examinar el movimiento de rodar sin deslizar, la velocidad del punto de la rueda que está en contacto con el plano horizontal debe de ser cero. Por tanto, la relación entre las velocidades angular de rotación ω y traslación v_c deberá ser $v_c=\omega R$. Observar que:

- La velocidad del punto de la rueda que está en contacto con el plano horizontal debe de ser cero
- La velocidad del centro de masas es v_c

La velocidad del punto más alto de la rueda es el doble de la velocidad del centro de masas, $2\cdot v_c$

Velocidad y trayectoria de un punto de una rueda.

En este programa interactivo, podemos observar el vector velocidad y la trayectoria que describe un punto de la rueda.

Se pulsa el botón titulado **Inicio**

- Situamos el puntero del ratón en un punto de color azul, pulsamos el botón izquierdo del ratón y lo arrastramos hasta la posición deseada en el diámetro vertical de la rueda . A continuación, dejamos de pulsar el botón izquierdo del ratón.

En la parte superior del applet, observamos la posición del punto relativa al centro de la rueda cuyo radio está fijado por el programa interactivo y es de un metro

Se introduce:

- La velocidad angular de rotación, en el control de selección titulado **v. rotación**
- La velocidad de traslación del centro de masas se ha fijado en v_c=1.0
- El radio de la rueda, se ha fijado en R=1.0

Se pulsa el botón titulado **Empieza**.

Cuando la rueda llega al final del applet, se pulsa el botón titulado **Inicio** para preparar otra "experiencia".

Observamos la trayectoria de un punto de la rueda y su vector velocidad, tangente a la trayectoria. El vector velocidad de un punto de la rueda es la suma de

- El vector velocidad en el movimiento de traslación, que es constante..
- El vector velocidad en el movimiento de rotación cuyo módulo es constante pero cuya dirección va cambiando, es perpendicular a la dirección radial y su longitud es proporcional a la distancia entre el punto de la rueda y el centro de la misma.

Se considerará aquellas situaciones en las que el disco rueda sin deslizar, (cuando la velocidad de rotación y de traslación coinciden, ya que el radio es de un metro). Se observará, en esta situación, el movimiento de:

- Un punto que está en la periferia de la rueda
- El centro de la rueda

Un punto situado entre el centro y la periferia.

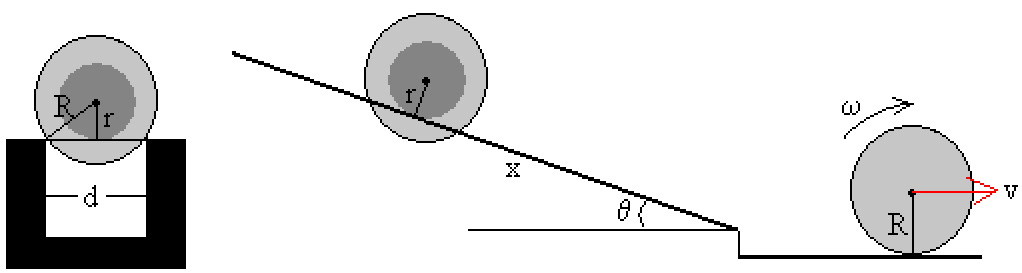
1.4.1 TRASLACIÓN Y ROTACIÓN

Equilibro entre el movimiento de traslación y el movimiento de rotación

En la página titulada "Movimiento de rodar en un plano inclinado" estudiamos el movimiento de rodar de un cuerpo sólido en forma de aro, cilindro o esfera a lo largo de un plano inclinado.

En la página titulada "Equilibrio rotación-traslación" estudiamos el movimiento de un de un disco que rueda sobre un plano horizontal cuya velocidad inicial de traslación y de rotación podía ser cualesquiera. El papel de la fuerza de rozamiento era el de establecer el equilibrio entre las velocidades de traslación v_c del centro de masas y de rotación ω alrededor de un eje que pasa por el c.m., de modo que al cabo de un cierto tiempo se cumpliese que $v_c=\omega\cdot R$.

En esta página, vamos a simular una experiencia en la que se combina ambas situaciones.



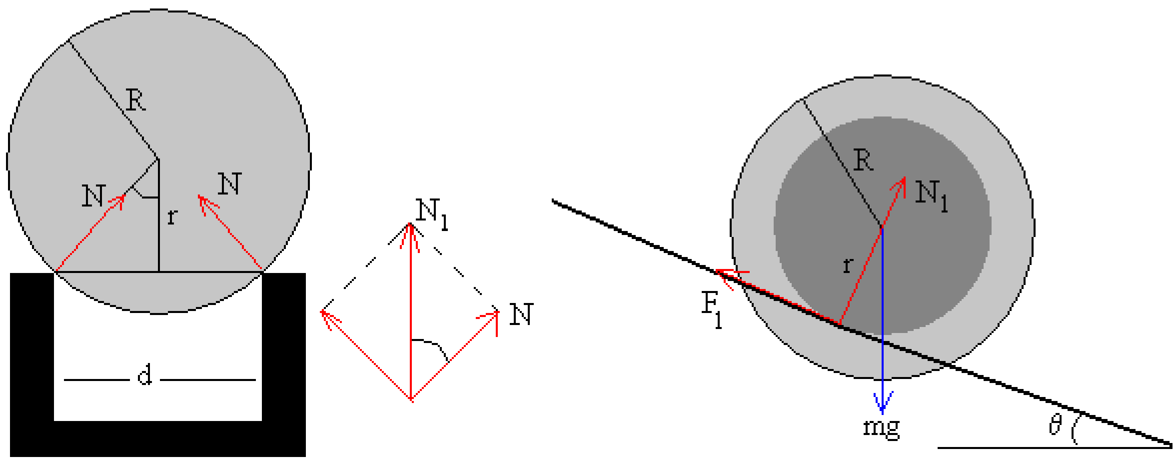
Supongamos una esfera de radio R que baja rodando sin deslizar a lo largo de un carril acanalado cuyas vías están separadas una distancia $d<2R$, y a continuación, se mueve sobre un plano horizontal. Se tratará de determinar la velocidad final v_c del centro de masas (c.m.) de la esfera.

Movimiento sobre un carril inclinado

La esfera tiene dos puntos de contacto con el carril, como podemos apreciar en la figura. Hay por tanto, dos fuerzas de rozamiento F_r y dos reacciones N del carril. La fuerza de rozamiento F_r tiene la dirección del carril, la reacción N es perpendicular al carril y pasa por el centro de la esfera.

- La resultante de las fuerzas de rozamiento es $F_1=2F_r$
- La resultante de las dos reacciones iguales y simétricas es $N_1=2Nr/R$.

Siendo *r* la distancia entre el plano que contiene las dos vías del carril y el centro de la esfera $r^2=R^2-d^2/4$.



Las fuerzas que actúan sobre la esfera son:

- El peso *mg*
- La resultante de las reacciones N_1
- La resultante de las fuerzas de rozamiento F_1

Las <u>ecuaciones del movimiento de la esfera</u> son

- Equilibrio en la dirección perpendicular al plano inclinado

$N_1=mg\cdot\cos\theta$

- Movimiento de traslación del c.m.

$mg\cdot\text{sen}\theta-F_1=ma_c$

- Movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por el c.m.

$F_1\cdot r=I_c\cdot\alpha$

- La esfera rueda sin deslizar si

$a_c=\alpha\cdot r$

Teniendo en cuenta que el <u>momento de inercia de una esfera</u> es $I_c=2mR^2/5$. Despejamos la aceleración del centro de masas

$$a_c = \text{gsen}\,\theta\frac{5-5d^2/(4R^2)}{7-5d^2/(4R^2)}$$

Calculamos la fuerza de rozamiento F_r y la reacción N en cada uno de los puntos de apoyo

$$F_r = \frac{mg\text{sen}\,\theta}{2(1+mr^2/I_c)}$$

$$N = \frac{R}{2r}mg\cos\theta$$

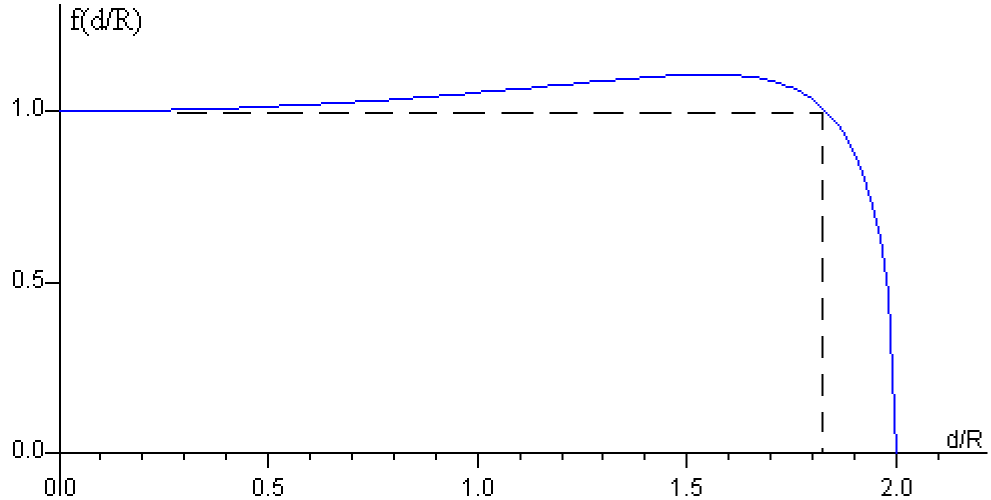
Condición de rodar sin deslizar

La esfera rueda sin deslizar siempre que F_r sea menor que la fuerza de rozamiento máxima $F_r<\mu_s\cdot N$. Teniendo en cuenta que el momento de inercia de la esfera es $I_c=2mR^2/5$. La inecuación se transforma en esta otra equivalente.

$$\mu_s \geq \frac{2}{7}\tan\theta\frac{\sqrt{1-\dfrac{d^2}{4R^2}}}{\left(1-\dfrac{5d^2}{28R^2}\right)}$$

Representamos gráficamente la fracción $f(d/R)$ que multiplica a $2\cdot\tan\theta/7$, en función de d/R. Esta fracción crece desde el valor 1.0 hasta alcanzar un máximo en $d/R=\sqrt{2.4}$ y luego, decrece rápidamente hasta que se hace cero para $d/R=2$.

La fracción es mayor que la unidad para $d/R<1.8$. Si fijamos el valor del ángulo θ, el coeficiente de rozamiento tiene que ser $\mu_s>2\cdot\tan\theta/7$. Por ejemplo, si $\theta=30º$, $\mu_s>0.165$, siempre que $d/R<1.8$



Balance energético

Cuando la esfera rueda sin deslizar. La velocidad del c.m. v_0 cuando llega al final del plano inclinado de longitud x, es

$$v_0^2 = 2a_c x$$

Cuando <u>la esfera baja rodando sin deslizar</u>, la energía potencial de la esfera se transforma en energía cinética de traslación y de rotación

$$mgx \cdot \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_c\omega_0^2 \qquad v_0 = \omega_0 \cdot r$$

Despejamos v_0 y obtenemos la misma expresión que la deducida a través de las ecuaciones del movimiento.

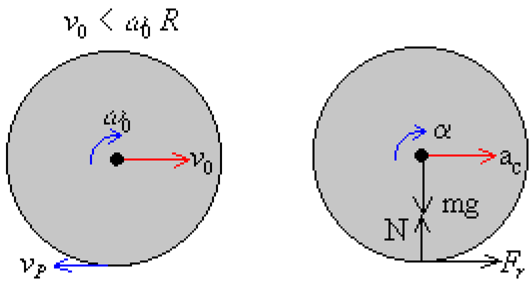
$$v_0^2 = 2g\,\text{sen}\,\theta \frac{5 - \frac{5d^2}{4R^2}}{7 - \frac{5d^2}{4R^2}} x$$

Movimiento sobre el plano horizontal

Cuando la esfera se pone en contacto con el plano horizontal la velocidad de su c.m. es v_0 y su velocidad angular de rotación es $\omega_0 = v_0/r$. Como en general, $r<R$ no

se cumple la condición de rodar sin deslizar $v_0=\omega_0 \cdot R$.

La fuerza de rozamiento actúa sobre el punto de contacto de la esfera con el plano horizontal a fin de restablecer la condición de equilibrio entre ambos movimientos.



Estamos en la situación en el que la velocidad del punto P de contacto de la rueda con el suelo no es nula $v_p=v_0-\omega_0 \cdot R$ sino que está dirigida hacia la izquierda es decir, $v_p<0$. La fuerza de rozamiento F_r tiene sentido hacia la derecha.

Las ecuaciones del movimiento son

- Equilibrio en sentido perpendicular al plano horizontal

$N=mg$

- Movimiento de traslación del c.m.

$m \cdot a_c=F_r$

- Movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por el c.m.

$I_c \alpha =-F_r \cdot R$

- Valor de la fuerza de rozamiento que actúa en el punto de contacto P que desliza a lo largo del plano horizontal.

$F_r=\mu_k \cdot N$

La velocidad v del centro de masa aumenta

$v_c=v_0+\mu_k \cdot gt$

La velocidad angular ω de rotación disminuye. Recordando que la velocidad inicial de rotación es $\omega_0=v_0/r$.

$$\omega = \frac{v_0}{r} - \frac{5\mu_k g}{2R}t$$

La velocidad del punto P de la esfera en contacto con el plano horizontal es

$v_P = v_c - \omega \cdot R$

que se hace cero $v_P=0$, en el instante t.

$$t = \frac{2v_0}{7\mu_k g}\left(\frac{R}{r} - 1\right)$$

El desplazamiento s del c.m. y el desplazamiento angular φ, ángulo girado por la esfera en el tiempo t son respectivamente

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}\mu g t^2$$

$$\varphi = \frac{v_0}{r}t - \frac{1}{2}\frac{5\mu_k g}{2R}t^2$$

Movimiento de rodar sin deslizar

En dicho instante t se establece el movimiento de rodar sin deslizar, $v=\omega \cdot R$.

La velocidad final constante v_c del c.m. de la esfera es

$$v_c = v_0\left(1 + \frac{2}{7}\left(\frac{R}{r} - 1\right)\right)$$

Balance energético

Determinamos la relación entre la energía inicial E_i, la final E_f y el trabajo de la fuerza de rozamiento W.

La energía inicial de la esfera es

$$E_i = mgx \cdot sen\,\theta = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_c\omega_0^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{r^2}\right)v_0^2$$

La energía final de la esfera cuando rueda sin deslizar $v_c=\omega\cdot R$ es

$$E_f=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}I_c\omega^2=\frac{7}{10}mv^2=mv_0^2\left(\frac{5}{14}+\frac{2}{7}\frac{R}{r}+\frac{2}{35}\frac{R^2}{r^2}\right)$$

La fuerza de rozamiento favorece el movimiento de traslación y se opone al movimiento de rotación. El trabajo de la fuerza de rozamiento es

$W=F_r\cdot s-M_r\cdot\varphi=-m\mu_k g(-s+R\varphi)$

Hemos calculado anteriormente los valores de los desplazamientos *s* y *φ* hasta el instante *t* en el que el disco rueda sin deslizar. Después de hacer algunas operaciones se obtiene

$$W=-\frac{1}{7}mv_0^2\left(\frac{R}{r}-1\right)^2$$

Podemos comprobar finalmente, que

$W=E_f-E_i$

Ejemplo:

- Cociente entre radios, d/R=1.5.
- Radio de la esfera, R=10 cm
- Coeficiente de la fuerza de rozamiento del plano horizontal e inclinado, μ=0.45
- Distancia que recorre la esfera a lo largo del plano inclinado x=1 m
- Ángulo del plano inclinado 30º

$r^2=R^2-d^2/4$. Tendremos que r=0.066 m

Obtenemos mediante las ecuaciones de la dinámica o del balance energético la velocidad v_0 del c.m. de la esfera al abandonar el plano inclinado.

$$v_0^2=2\cdot 9.8\text{sen}30^\circ\frac{5-5\cdot 1.5^2/4}{7-5\cdot 1.5^2/4}1.0\qquad v_0=2.26\text{ m/s}$$

La velocidad angular de rotación de la esfera será es

$$\omega_0 = \frac{v_0}{r} = \frac{2.26}{0.066} = 34.21\,\text{rad/s}$$

La esfera comienza a rodar sobre el plano horizontal, pero no se cumple la condición $v_0=\omega_0\cdot R$. La velocidad del punto P de contacto de la esfera con el plano horizontal no es cero, sino que vale

$v_P=v_0-\omega_0\cdot R=-1.16$ m/s

La fuerza de rozamiento tratará de restablecer el equilibrio, entre los movimientos de traslación y rotación hasta que $v_P=0$. Por lo que incrementa la velocidad de traslación v_c y disminuye la velocidad angular de rotación ω.

Al cabo de un tiempo de

$$t = \frac{2v_0}{7\mu g}\left(\frac{R}{r} - 1\right) = \frac{2\cdot 2.26}{7\cdot 0.45\cdot 9.8}\left(\frac{0.1}{0.066} - 1\right) = 0.075\,s$$

se restablece el equilibrio y la esfera rueda sin deslizar con una velocidad constante de

$$v_c = v_0\left(1 + \frac{2}{7}\left(\frac{R}{r} - 1\right)\right) = 2.26\left(1 + \frac{2}{7}\left(\frac{0.1}{0.066} - 1\right)\right) = 2.59\,\text{m/s}$$

Balance energético

La energía inicial de la esfera es

$E_i=mgx\cdot\text{sen}\theta=m\cdot 9.8\cdot 1.0\cdot\text{sen}30^\circ=4.9\cdot m$ J

Esta energía se va trasformando en energía cinética de traslación y de rotación

Como $v_c=\omega\cdot r$. Con R=0.1 y r=0.066. La energía cinética de rotación representa el

$$\frac{\frac{1}{2}I_c\omega^2}{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\frac{v^2}{r^2}}{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\frac{v^2}{r^2}} = \frac{2R^2}{5r^2 + 2R^2} = 0.48$$

48% de la energía cinética total

Cuando rueda sin deslizar a lo largo del plano horizontal se cumple $v_c=\omega\cdot R$

$$\frac{\frac{1}{2}I_c\omega^2}{\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I_c\omega^2}=\frac{2}{7}=0.29$$

La energía cinética de rotación representa los 2/7=29% de la energía cinética total

UNIDAD 2

CINÉTICA DE LA PARTÍCULA Y DEL CUERPO RÍGIDO.

Objetivo Educacional

Aplicará las leyes de Newton en la solución de problemas de ingeniería

2 CINÉTICA DE LA PARTÍCULA Y DEL CUERPO RÍGIDO

2.1 LEYES DE NEWTON

Las **Leyes de Newton** son tres principios a partir de los cuales se explican la mayor parte de los problemas planteados por la dinámica, en particular aquellos relativos al movimiento de los cuerpos.

En concreto, la relevancia de estas leyes radica en dos aspectos:

- por un lado, constituyen, junto con la transformación de Galileo, la base de la mecánica clásica;
- por otro, al combinar estas leyes con la Ley de la gravitación universal, se pueden deducir y explicar las Leyes de Kepler sobre el movimiento planetario.

Así, las Leyes de Newton permiten explicar tanto el movimiento de los astros, como los movimientos de los proyectiles artificiales creados por el ser humano, así como toda la mecánica de funcionamiento de las máquinas.

Su formulación matemática fue publicada por Isaac Newton en 1687 en su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.[1]

No obstante, la dinámica de Newton, también llamada *dinámica clásica*, solo se cumple en los sistemas de referencia inerciales; es decir, sólo es aplicable a cuerpos cuya velocidad dista considerablemente de la velocidad de la luz (que no sobrepasen los 300,000 km/s); la razón estriba en que mientras más cerca esté un cuerpo de alcanzar esa velocidad (lo que ocurriría en los sistemas de referencia no-inerciales), más posibilidades hay de que incidan sobre el mismo una serie de fenómenos denominados *efectos relativistas o fuerzas ficticias*, que añaden términos suplementarios capaces de explicar el movimiento de un sistema cerrado de partículas clásicas que interactúan entre sí. El estudio de estos efectos (aumento de la masa y contracción de la longitud, fundamentalmente) corresponde a la teoría de la relatividad especial.

2.1.1 ENUNCIADOS Y ESQUEMAS DE VISUALIZACIÓN

Fundamentos teóricos de las leyes

La base teórica que permitió a Newton establecer sus leyes, está también precisada en sus *Philosophiae naturalis principia mathematica*.

El primer concepto que maneja es el de *masa*, al que identifica con "cantidad de materia"; la importancia de esta precisión está en que le permite prescindir de toda cualidad que no sea física-matemática a la hora de tratar la dinámica de los cuerpos. Con todo, utiliza la idea de éter para poder mecanizar todo aquello no reducible a su concepto de *masa*.

Newton asume a continuación que la cantidad de movimiento es el resultado del producto de la masa por la velocidad y define dos tipos de fuerzas: la *vis insita*, que es proporcional a la masa y que refleja la inercia de la materia, y la *vis impressa* (momento de fuerza), que es la acción que cambia el estado de un cuerpo, sea cual sea ese estado; la *vis impressa*, además de producirse por choque o presión, puede deberse a la *vis centripeta* (fuerza centrípeta), una fuerza que lleva al cuerpo hacia algún punto determinado. A diferencia de las otras causas, que son acciones de contacto, la *vis centripeta* es una acción a distancia. En esta distingue Newton tres tipos de cantidades de fuerza: una absoluta, otra aceleradora y, finalmente, la motora, que es la que interviene en la ley fundamental del movimiento.

En tercer lugar, precisa la importancia de distinguir entre lo absoluto y relativo siempre que se hable de tiempo, espacio, lugar o movimiento.

En este sentido, Newton, que entiende el movimiento como una traslación de un cuerpo de un lugar a otro, para llegar al movimiento absoluto y verdadero de un cuerpo.

Compone el movimiento (relativo) de ese cuerpo en el lugar (relativo) en que se lo considera, con el movimiento (relativo) del lugar mismo en otro lugar en el que esté situado, y así sucesivamente, paso a paso, hasta llegar a un *lugar inmóvil*, es decir, al sistema de referencias de los movimientos absolutos.

De acuerdo con esto, Newton establece que los movimientos aparentes son las diferencias de los movimientos verdaderos y que las fuerzas son causas y efectos de estos. Consecuentemente, la fuerza en Newton tiene un carácter absoluto, no relativo.

Las leyes de Newton:

Primera Ley de Newton o principio de Inercia

Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser en tanto que sea obligado por fuerzas impresas a cambiar su estado.

La primera ley especifica que todo cuerpo continúa en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, a menos que actúe sobre él una fuerza que le obligue a cambiar dicho estado.

Este principio establece que la materia es inerte, en tanto que por sí misma no puede modificar su estado de reposo o movimiento. Así, pues, constituye una definición de la fuerza como causa de las variaciones de velocidad de los cuerpos e introduce en física el concepto de sistema de referencia inercial.

Por lo demás, aunque la experiencia diaria parece contradecir la segunda parte del enunciado, que un cuerpo en movimiento se mantendrá así de forma indefinida a no ser que actúe sobre él alguna fuerza, la realidad es que los cuerpos están sometidos a la acción de fuerzas de fricción o rozamiento, que los van frenando progresivamente.

Segunda Ley de Newton o Ley de Fuerza

El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.

La segunda ley explica qué ocurre si sobre un cuerpo en movimiento actúa una fuerza. En ese caso, la fuerza modificará el movimiento, cambiando la velocidad en módulo o dirección. En concreto, los cambios experimentados en la cantidad de movimiento de un cuerpo son proporcionales a la fuerza motriz y se desarrollan en la dirección de esta; esto es, las fuerzas son causas que producen aceleraciones en los cuerpos.

Consecuentemente, hay relación entre la causa y el efecto, esto es, la fuerza y la aceleración están relacionadas.

En términos matemáticos esta ley se expresa mediante dos relaciones:

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \frac{\mathrm{d}(m\mathbf{v})}{\mathrm{d}t}$$

y

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

que es la ecuación fundamental de la dinámica, donde la constante de proporcionalidad distinta para cada cuerpo es su *masa de inercia*, pues las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo sirven para vencer su inercia, con lo que masa e inercia se identifican. Es por esta razón por la que la masa se define como una medida de la inercia del cuerpo.

Por tanto, si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es cero, esta partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en dirección de ésta. La expresión anterior así establecida es válida tanto para la mecánica clásica como para la mecánica relativista, a pesar de que la definición de momento lineal es diferente en las dos teorías: mientras que la dinámica clásica afirma que la masa de un cuerpo es siempre la misma, con independencia de la velocidad con la que se mueve, la mecánica relativista establece que la masa de un cuerpo aumenta al crecer la velocidad con la que se mueve dicho cuerpo.

De la ecuación fundamental se deriva también la definición de la unidad de fuerza o *newton* (N). Si la masa y la aceleración valen 1, la fuerza también valdrá 1; así, pues, el newton es la fuerza que aplicada a una masa de un kilogramo le produce una aceleración de 1 m/s^2. Se entiende que la aceleración y la fuerza han de tener la misma dirección y sentido.

La importancia de esa ecuación estriba sobre todo en que resuelve el problema de la dinámica de determinar la clase de fuerza que se necesita para producir los diferentes tipos de movimiento: rectilíneo uniforme, circular uniforme y uniformemente acelerado.

Tercera Ley de Newton o Ley de acción y reacción

Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: o sea, las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas.

La tercera ley expone que por cada fuerza que actúa sobre un cuerpo, este realiza una fuerza igual pero de sentido opuesto sobre el cuerpo que la produjo. Dicho de otra forma, las fuerzas siempre se presentan en pares de igual magnitud, sentido opuesto y están situadas sobre la misma recta. Este principio se aplica a toda clase de fuerzas y presupone que la interacción entre dos partículas se propaga instantáneamente en el espacio (con velocidad finita).

Es importante observar que este principio de acción y reacción relaciona dos fuerzas que no están aplicadas al mismo cuerpo, produciendo en ellos aceleraciones diferentes, según sean sus masas. Por lo demás, cada una de esas fuerzas obedecen por separado a la segunda ley.

Junto con las anteriores, permite enunciar los principios de conservación del momento lineal y del momento angular.

Generalizaciones

Después de que Newton formulara las famosas tres leyes, numerosos físicos y matemáticos hicieron contribuciones para darles una forma más general o de más fácil aplicación a sistemas no inerciales o a sistemas con ligaduras. Una de estas primeras generalizaciones fue el principio de d'Alembert de 1743 que era una forma válida para cuando existieran ligaduras que permitía resolver las ecuaciones sin necesidad de calcular explícitamente el valor de las reacciones asociadas a dichas ligaduras.

Por la misma época, Lagrange encontró una forma de las ecuaciones de movimiento válida para cualquier sistema de referencia inercial o no-inercial sin necesidad de introducir fuerzas ficticias. Ya que es un hecho conocido que las Leyes de Newton, tal como fueron escritas, sólo son válidas a los sistemas de referencia inerciales, o más precisamente, para aplicarlas a sistemas no-inerciales, requieren la introducción de las llamadas fuerzas ficticias, que se comportan como fuerzas pero no están provocadas directamente por ninguna partícula material o agente concreto, sino que son un efecto aparente del sistema de referencia no inercial.

Más tarde la introducción de la teoría de la relatividad obligó a modificar la forma de la segunda ley de Newton, y la mecánica cuántica dejó claro que las leyes de Newton o la relatividad general sólo son aproximaciones al comportamiento dinámico en escalas macroscópicas. También se han conjeturado algunas modificaciones macroscópicas y no-relativistas, basadas en otros supuestos como la dinámica.

Generalizaciones relativistas

Las leyes de Newton constituyen tres principios aproximadamente válidos para velocidades pequeñas. La forma en que Newton las formuló no era la más general posible. De hecho la segunda y tercera leyes en su forma original no son válidas en mecánica relativista sin embargo formulados de forma ligeramente diferente la segunda ley es válida, y la tercera ley admite una formulación menos restrictiva que es válida en mecánica relativista.

- *Primera ley*, en ausencia de campos gravitatorios no requiere modificaciones. En un espacio-tiempo plano una línea recta cumple la condición de ser geodésica. En presencia de curvatura en el espacio-tiempo la primera ley de Newton sigue siendo correcta si substituimos la expresión línea recta por línea geodésica.
- *Segunda ley*. Sigue siendo válida si se formula dice que la fuerza sobre una partícula coincide con la tasa de cambio de su cantidad de movimiento lineal. Sin embargo, ahora la definición de momento lineal en la teoría newtoniana y en la teoría relativista difieren. En la teoría newtoniana el momento lineal se define según (1a) mientras que en la teoría de la relatividad de Einstein se define mediante (1b):

$$\begin{cases} \vec{p} = m\vec{v} & (1a) \\ \vec{p} = \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & (1b) \end{cases}$$

donde *m* es la masa invariante de la partícula y $\vec{v}$ la velocidad de ésta medida desde un cierto sistema inercial. Esta segunda formulación de hecho incluye implícitamente definición (1) según la cual el momento lineal es el producto de la masa por la velocidad. Como ese supuesto implícito no se cumple en el marco de la teoría de la relatividad de Einstein (donde la definición es (2)), la expresión de la fuerza en términos de la aceleración en la teoría de la relatividad toma una forma diferente. Por ejemplo, para el movimiento rectilíneo de una partícula en un sistema inercial se tiene que la expresión equivalente a (2a) es:

$$\vec{F} = m\vec{a}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

(2b)

Si la velocidad y la fuerza no son paralelas, la expresión sería la siguiente:

$$\vec{F} = \frac{m\vec{a}}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} + \frac{m(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v}}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$$

(2c)

- **Tercera Ley de Newton**. La formulación original de la tercera ley por parte de Newton implica que la acción y reacción, además de ser de la misma magnitud y opuestas, son colineales. En esta forma la tercera ley no siempre se cumple en presencia de campos magnéticos. En particular, la parte magnética de la fuerza de Lorentz que se ejercen dos partículas en movimiento no son iguales y de signo contrario. Esto puede verse por cómputo directo. Dadas dos partículas puntuales con cargas q_1 y q_2 y velocidades $\mathbf{v}_i$, la fuerza de la partícula 1 sobre la partícula 2 es:

$$\mathbf{F}_{12} = q_2\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1 = \frac{\mu q_2 q_1}{4\pi}\,\frac{\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \hat{\mathbf{u}}_{12})}{d^2}$$

donde *d* la distancia entre las dos partículas y $\hat{\mathbf{u}}_{12}$es el vector director unitario que va de la partícula 1 a la 2. Análogamente, la fuerza de la partícula 2 sobre la partícula 1 es:

$$\mathbf{F}_{21} = q_1\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_2 = \frac{\mu q_2 q_1}{4\pi}\,\frac{\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times (-\hat{\mathbf{u}}_{12}))}{d^2}$$

Empleando la identidad vectorial $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$, puede verse que la primera fuerza está en el plano formado por $\hat{\mathbf{u}}_{12}$y $\mathbf{v}_1$que la segunda fuerza está en el plano formado por $\hat{\mathbf{u}}_{12}$y $\mathbf{v}_2$. Por tanto, estas fuerzas no siempre resultan estar sobre la misma línea, aunque son de igual magnitud.

Ley de acción y reacción débil

Como se explicó en la sección anterior ciertos sistemas magnéticos no cumplen el enunciado fuerte de esta ley (tampoco lo hacen las fuerzas eléctricas ejercidas entre una carga puntual y un dipolo). Sin embargo si se relajan algo las condiciones los anteriores sistemas sí cumplirían con otra formulación más débil o relajada de la ley de acción y reacción. En concreto los sistemas descritos que no cumplen la ley en su forma fuerte, si cumplen la ley de acción y reacción en su forma débil:

La acción y la reacción deben ser de la misma magnitud y sentido opuesto (aunque no necesariamente deben encontrarse sobre la misma línea)

Todas las fuerzas de la mecánica clásica y el electromagnetismo no relativista cumplen con la formulación débil, si además las fuerzas están sobre la misma línea entonces también cumplen con la formulación fuerte de la tercera ley de Newton.

Aplicaciones de las leyes de Newton

Cuando aplicamos las leyes de Newton a un cuerpo, sólo estamos interesados en aquellas fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo.

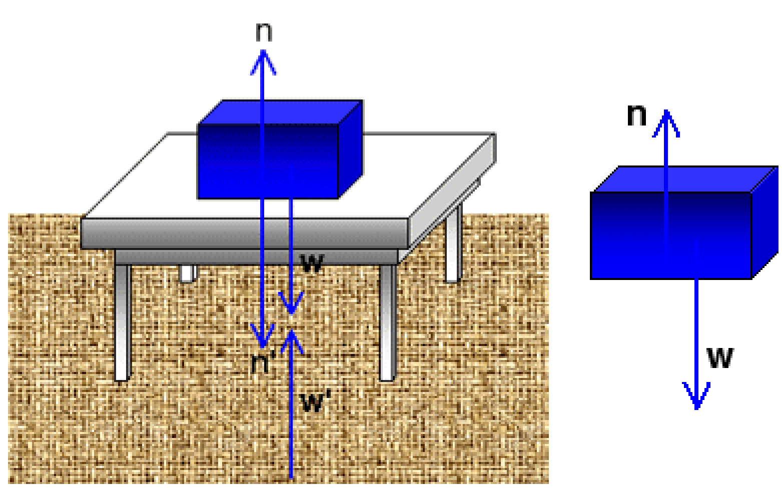


Fig. 2.1.1-1

Cuando una caja está en reposo sobre una mesa, las fuerzas que actúan sobre el aparato son la fuerza normal, **n**, y la fuerza de gravedad, **w**, como se ilustran. La reacción a **n** es la fuerza ejercida por la caja sobre la mesa, **n'**. La reacción a **w** es la fuerza ejercida por la caja sobre la Tierra, **w'**.

En otro ejemplo se tiene una caja que se jala hacia la derecha sobre una superficie sin fricción, como se muestra en la figura de la izquierda.

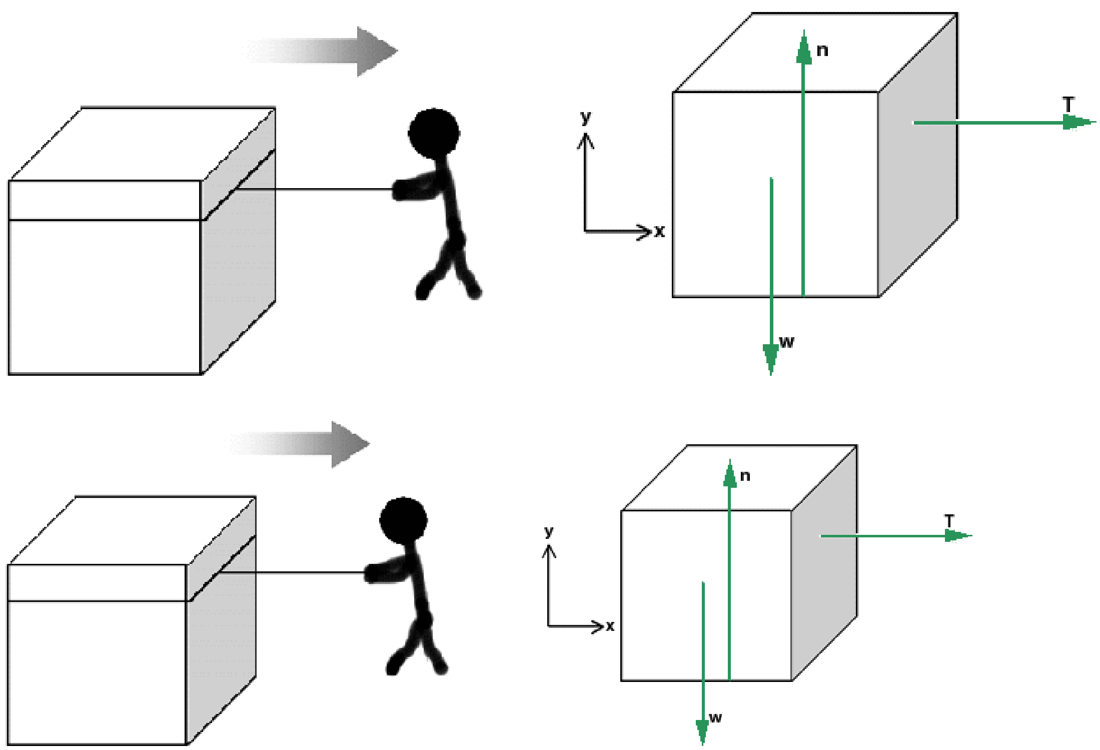


Fig.2.1.1-2 Diagrama de cuerpo libre

En la figura de la derecha se tiene el diagrama de cuerpo libre que representa a las fuerzas externas que actúan sobre la caja.

Cuando un objeto empuja hacia abajo sobre otro objeto con una fuerza **F**, la fuerza normal **n** es mayor que la fuerza de la gravedad. Esto es, n = w + F.

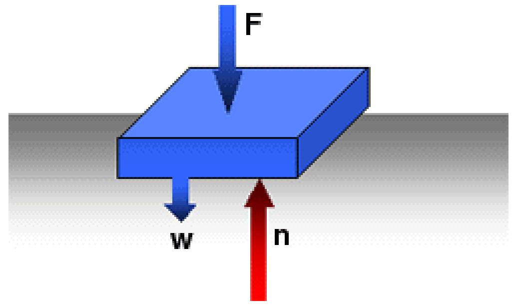


Fig. 2.1.1-3

En otro ejemplo se tiene un peso w suspendido del techo por una cuerda de masa despreciable. Las fuerzas que actúan sobre el peso son la gravedad, **w**, y la fuerza ejercida por la cadena, **T**. Las fuerzas que actúan sobre la cuerda son la fuerza ejercida por el peso, **T'**, y la fuerza ejercida por el techo, **T''**.

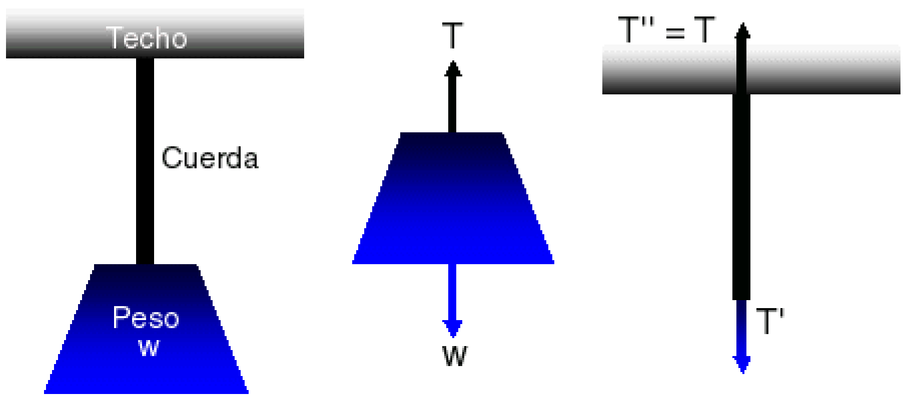


Fig. 2.1.1-4

Después de haber visto algunos ejemplos donde se muestra la manera en como se utilizan las leyes de Newton, a continuación se presentara una estrategia para la solución de problemas en los cuales se tiene que aplicar las leyes de Newton.

1.- Dibuje un diagrama sencillo y claro del sistema.

2.- Aísle el objeto cuyo movimiento se analiza. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para este objeto, es decir, un diagrama que muestre todas las fuerzas externas que actúan sobre él. Para sistemas que contienen más de un objeto, dibuje diagramas de cuerpo libre independientes para cada uno. No incluya en el diagrama de cuerpo libre las fuerzas que el objeto ejerce sobre sus alrededores.

3.- Establezca ejes de coordenadas convenientes para cada objeto y determine las componentes de las fuerzas a lo largo de estos ejes. Aplique la segunda ley de Newton, F = ma, en la forma de componentes. Verifique sus dimensiones, para asegurar que todos los términos tengan unidades de fuerza.

4.- Resuelva las ecuaciones de componentes para las incógnitas. Recuerde que se deben tener tantas ecuaciones independientes como incógnitas para poder obtener una solución completa.

5.- Verifique las predicciones de sus soluciones para valores extremos de las variables. Es posible que al hacerlo detecte errores en sus resultados.

2.1.2 DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

Diagramas de Cuerpo Libre

Un **diagrama de cuerpo libre o diagrama de cuerpo aislado** debe mostrar todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo. Es fundamental que el diagrama de cuerpo libre esté correcto antes de aplicar la **Segunda ley de Newton**, $\Sigma F_{ext} = ma$

En estos diagramas, se escoge un objeto o cuerpo y se aísla, reemplazando las cuerdas, superficies u otros elementos por fuerzas representadas por flechas que indican sus respectivas direcciones. Por supuesto, también debe representarse la **fuerza de gravedad y las fuerzas de fricción**. Si intervienen varios cuerpos, se hace un diagrama de cada uno de ellos, por separado.

A continuación se muestra algunos sistemas (izquierda) y los correspondientes diagramas de cuerpo aislado (derecha). F (ó T) representa la fuerza trasmitida por la cuerda; N la normal; mg el peso y f la fuerza de roce o de fricción.

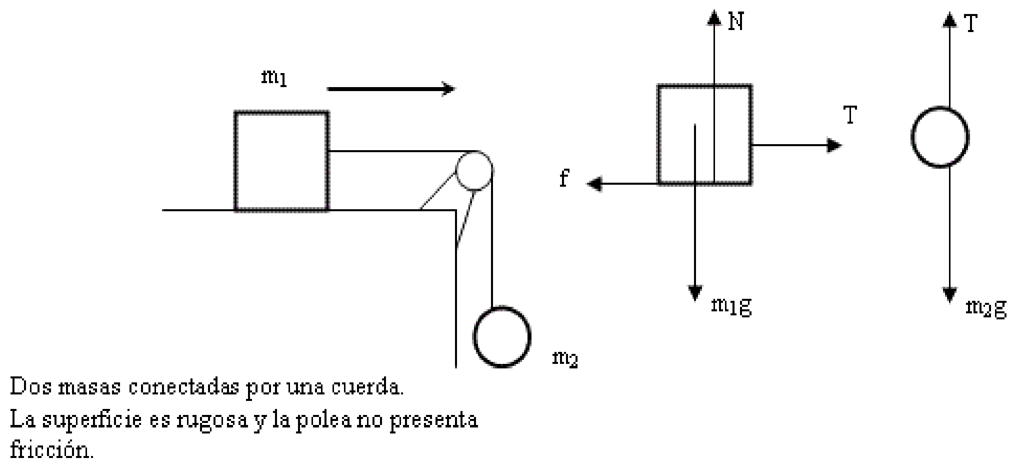


Fig. 2.1.2-1 Diagramas de cuerpo libre

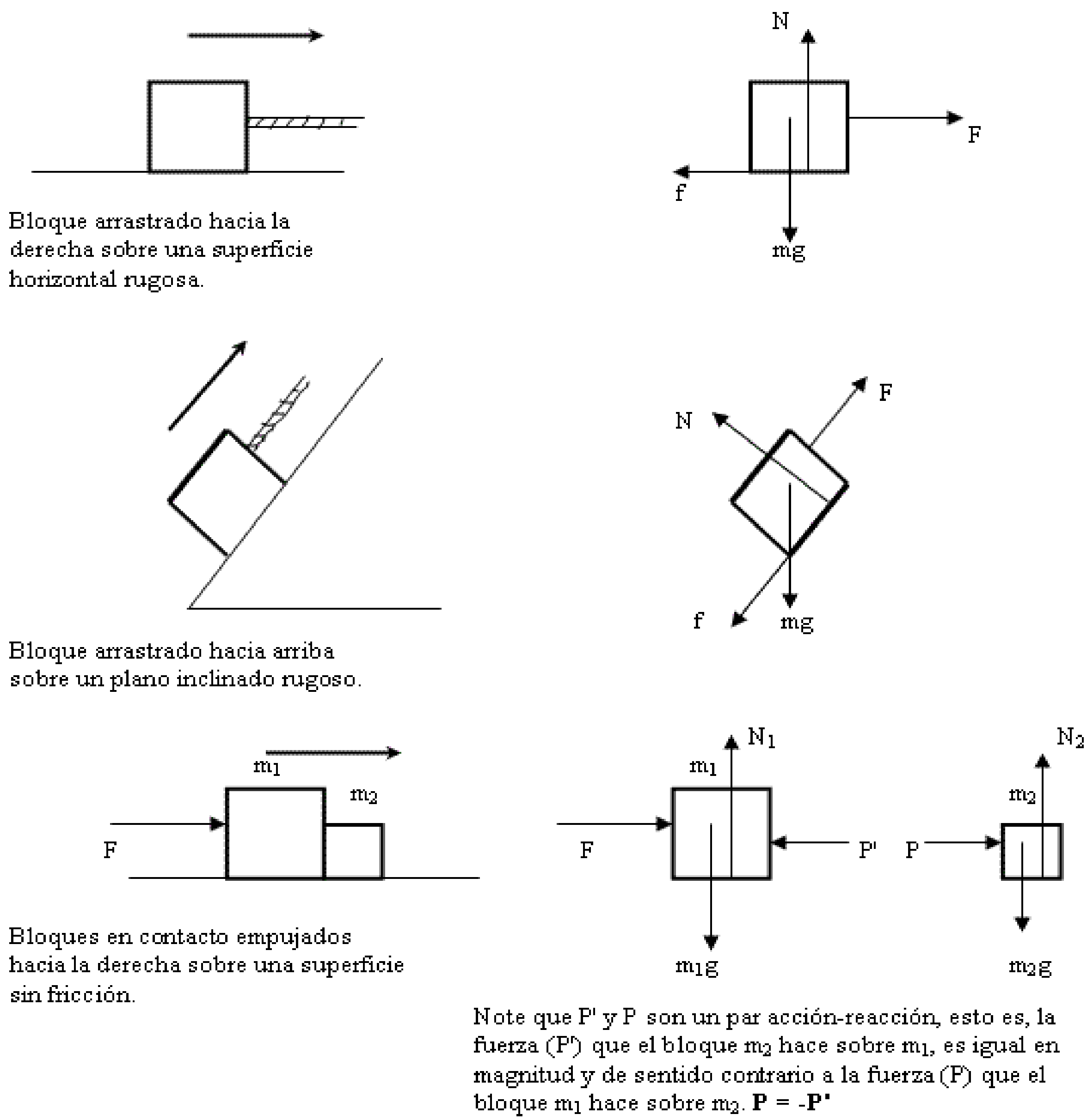


Fig. 2.1.2-2 Diagramas de cuerpo libre

2.2 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

La Dinámica es la rama de la mecánica que estudia los cuerpos en movimiento y las fuerzas que intervienen.

Las leyes de Newton para el movimiento de los cuerpos han sido formuladas de una gran variedad de formas. Para nuestro propósito, las expresamos como sigue:

- Una partícula bajo el efecto de un sistema de fuerzas equilibradas tiene aceleración nula.
- Una partícula bajo el efecto de un sistema de fuerzas no equilibradas tiene una aceleración directamente proporcional a la resultante del sistema de fuerzas y paralela a ella.
- Las fuerzas de acción y de reacción entre dos partículas son siempre iguales y de direcciones contrarias.

Peso de un cuerpo. El peso de un cuerpo es la fuerza de atracción gravitacional ejercida sobre el cuerpo por la Tierra y depende de su posición respecto al centro de la Tierra.

Masa de un cuerpo. La masa M de un cuerpo es la cantidad de materia que contiene y es independiente del lugar donde se encuentre; también se le conoce como masa inercial ya que representa la inercia de un cuerpo, es decir la resistencia de un cuerpo al cambio en su movimiento.

A la razón entre el peso P de un cuerpo y la constante gravitacional g: $M = \frac{P}{g}$, se le conoce como masa gravitacional M. Pero como el peso y la constante gravitacional varían de acuerdo a su posición con respecto al centro de la Tierra, no se ha podido demostrar ninguna diferencia entre la masa gravitacional y la masa inercial, por lo que se tomarán indistintamente.

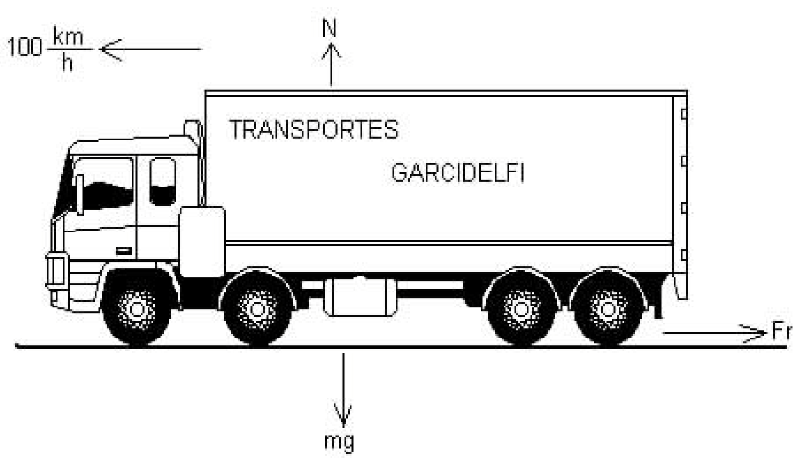
Partícula. El término partícula suele referirse a un objeto cuyo tamaño se reduce a un punto. (Para nuestro curso de Física 1 se especifica el inicio de curso)

Cuerpo. El termino cuerpo suele referirse a un sistema de partículas que forman un objeto de tamaño apreciable. Sin embargo el criterio del tamaño es relativo, por lo cual los términos cuerpo y partícula se pueden aplicar al mismo objeto si es que la masa no se toma en cuenta en el análisis.

Tabla que muestra los sistemas de unidades a trabajar en la unidad 2, subtema 2.2 Resolución de ecuaciones

Sistema	Longitud	Tiempo	Fuerza	Masa
Gravitacional Inglés	pie (pie)	segundo (seg, s)	libra fuerza, lb, pound	slug $\frac{lb \cdot seg^2}{pie}$
Gravitacional Métrico técnico.	metro (m)	seg	kilogramo fuerza (kgf)	utm $\frac{kgf \cdot seg^2}{m}$
Métrico absoluto CGS	centímetro (cm)	seg	dina $\frac{gr \cdot seg}{cm^2}$	gramo gr
Métrico absoluto MKS	metro (m)	seg	newton $\frac{kg \cdot m}{seg^2}$	kilogramo kg

PROBLEMA 2.2.1. Si el coeficiente cinético de rozamiento entre las llantas de un automóvil y el pavimento seco es de $\mu_k = 0.4$, determinar la distancia mínima en la cual el auto puede detenerse con una velocidad inicial de $100 \frac{km}{h}$.



Paso 1. Fuerza de rozamiento : $Fr = \mu_k \cdot N$; donde μ_k es el coeficiente dinámico de rozamiento y N es la fuerza normal, esto es, la reacción de la superficie de apoyo sobre el auto, que es igual en este caso al peso del auto por considerarse una superficie de apoyo horizontal. Por lo que $N = M \cdot g$; siendo m la masa del auto.

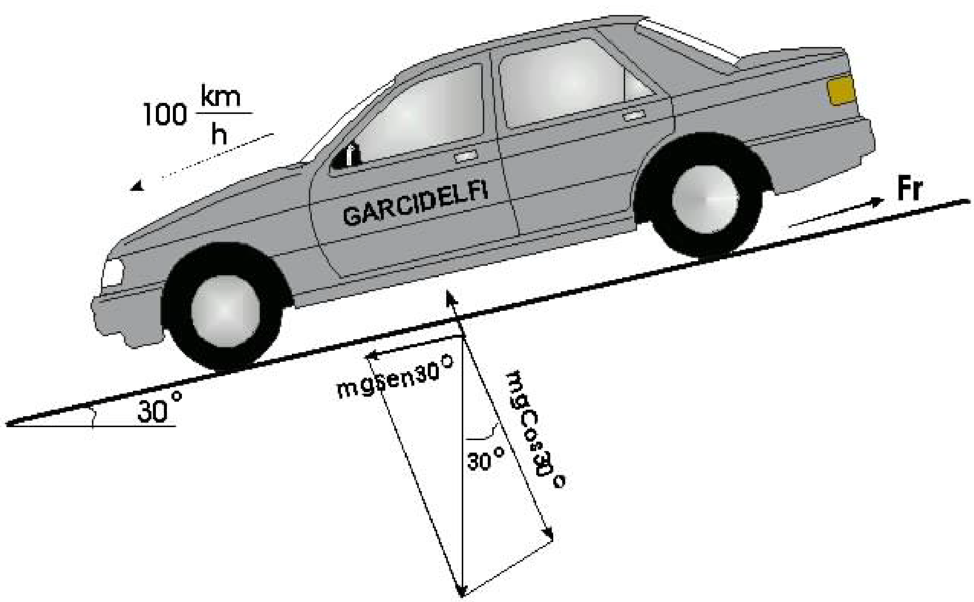
Paso 2. Aplicando la segunda ley de Newton: $F = M \cdot a$; sustituyendo a F por la fuerza de rozamiento: $\mu_k \cdot N = M \cdot a$; como $N = M \cdot g$, se tiene: $\mu_k (M \cdot g) = M \cdot a$; simplificando: $\boxed{\mu_k \cdot g = a}$

despejando y sustituyendo valores se tiene: $a = (0.4)(9.8m\frac{m}{seg^2} = 3.92\frac{m}{seg^2}$

Paso 3. Para calcular la distancia en la cual el auto se detiene, se utiliza la fórmula que corresponde a los datos : $v_f^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot d$; despejando y

sustituyendo: $d = \frac{v_0^2}{2 \cdot a} = \frac{100(0.2778)\frac{m}{seg}}{2(3.92\frac{m}{seg^2})} = 98.43m$ **De solución.**

- **PROBLEMA 2.2.2.** Un automóvil que lleva una velocidad de $100\frac{km}{h}$, baja por una pendiente que forma un ángulo de 30^0 con la horizontal, al aplicar los frenos el coeficiente de rozamiento entre las llantas y el asfalto es de 0.8. Calcular la distancia que recorre hasta detenerse.



Paso 1. Aplicando la segunda ley de Newton y considerando positivas las fuerzas en el sentido del movimiento: $\overset{\swarrow}{+}\sum F = M \cdot a$; sustituyendo de acuerdo al diagrama de cuerpo libre de la figura:

$M \cdot g \cdot Sen\theta - F_r = M \cdot a$; como la fuerza de rozamiento está expresada por

$F_r = \mu_k \cdot N$; sustituyendo : $Mg \cdot Sen\theta - \mu_k \cdot M \cdot g \cdot Cos\theta = M \cdot a$; eliminando la masa:

$\boxed{g(Sen\theta - \mu_k \cdot Cos\theta) = a}$; sustituyendo los valores proporcionados:

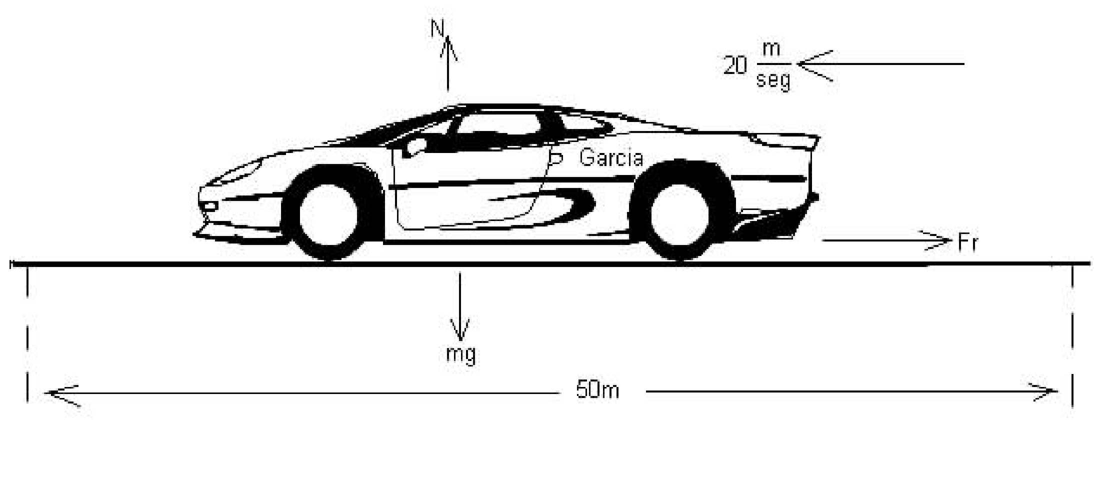
$$a = 9.8\frac{m}{seg^2}(Sen30^o - 0.8Cos30^o)$$

con lo cual se obtiene que la aceleración es de $a = -1.88\frac{m}{seg^2}$

Paso 2. La distancia en la cual se detiene, se obtiene sustituyendo los datos en la relación:

$v_f^2 = v_0^2 + 2a \cdot d$; con lo cual resulta $d = \frac{-(100 \cdot 0.278\frac{m}{seg})^2}{2(-1.88\frac{m}{seg^2})} = 205.5m$ de solución.

PROBLEMA 2.2.3. Un auto lleva una velocidad de $20\frac{m}{seg}$ en el instante en que aplica los frenos en forma constante, y recorre 50m hasta llegar al reposo. Determinar: a) el tiempo empleado en detenerse; b) el coeficiente cinético de rozamiento entre las llantas y el asfalto.



Paso 1. Con los datos proporcionados, calcular la desaceleración:

$v_f^2 = v_0^2 + 2a \cdot d$; despejando y sustituyendo:

$$a = \frac{-v_0^2}{2d} = \frac{-(20\frac{m}{seg})^2}{2(50m)} = -4\ \frac{m}{seg^2}\ .$$

Paso 2. Con la aceleración obtenida, se calcula ahora el tiempo que tarda en detenerse: $v_f = v_0 + a \cdot t$; despejando y sustituyendo

valores: $t = \dfrac{-20\frac{m}{seg}}{-4\frac{m}{seg^2}} = 5\,seg$. resultado

Paso 3. Para calcular el coeficiente de rozamiento dinámico, se utiliza la segunda ley de Newton:

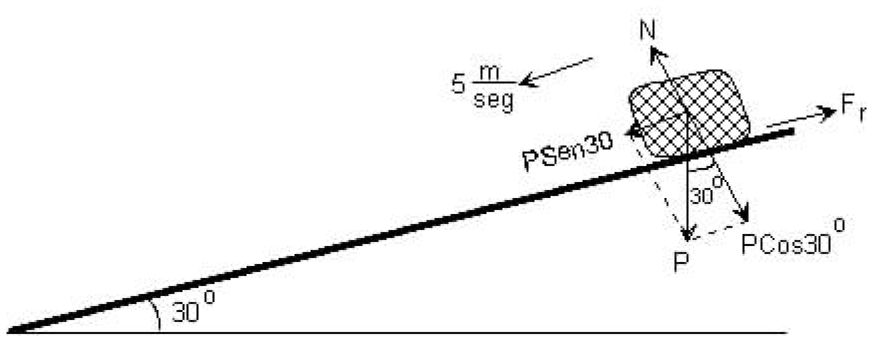
$F = M \cdot a$; siendo en este caso $F = F_r$, por ser la única fuerza, la fuerza de rozamiento, la que se opone al movimiento; sustituyendo $F_r = \mu_k \cdot N$; se obtiene:

$\mu_k \cdot N = M \cdot a$; la fuerza normal N es igual al peso del auto por estar sobre una superficie horizontal; por lo que sustituyendo: $\mu_k \cdot M \cdot g = M \cdot a$; quedando:

$\boxed{\mu_k = \frac{a}{g}}$; por lo que el valor del coeficiente de rozamiento, es

$$\mu_k = \left| \frac{-4\frac{m}{seg^2}}{9.8\frac{m}{seg^2}} \right| = 0.4$$ **De solución.**

PROBLEMA 2.2.4. Un paquete de 10 Newtons de peso se lanza hacia abajo por un plano inclinado 30^0 con la horizontal, con una velocidad de $5\frac{m}{seg}$. Si el coeficiente cinético de rozamiento entre las superficies de contacto es de 0.2, determinar: a) la velocidad del paquete cuando se ha deslizado 5m; b) la distancia que recorre el paquete hasta llegar al reposo.



Paso 1. Aplicando la segunda ley de Newton y considerando positivas las

fuerzas en el sentido del movimiento: $\swarrow\!+ \sum F = M \cdot a$; sustituyendo de acuerdo con el diagrama de cuerpo libre de la figura, y sabiendo que $F_r = \mu_k \cdot N = \mu_k \cdot PCos\theta$; siendo P el peso del paquete:

$P \cdot Sen\theta - \mu_k \cdot PCos\theta = M \cdot a$; sustituir en esta expresión la relación $M = \frac{P}{g}$:

$PSen\theta - \mu_k \cdot PCos\theta = \frac{P}{g}a$; eliminando a P : $Sen\theta - \mu_k Cos\theta = \frac{a}{g}$; despejando la aceleración y sustituyendo valores: $\boxed{a = g(Sen\theta - \mu_k Cos\theta)}$ Se observa que no es necesario conocer el peso del paquete. Sustituyendo valores:

$$a = 9.8\frac{m}{seg^2}(Sen30^o - 0.7Cos30^o) = -1.04\frac{m}{seg^2}$$

Paso 2. Conociendo la aceleración, calculamos la velocidad que tendrá el paquete cuando haya descendido 5m a lo largo del plano inclinado:

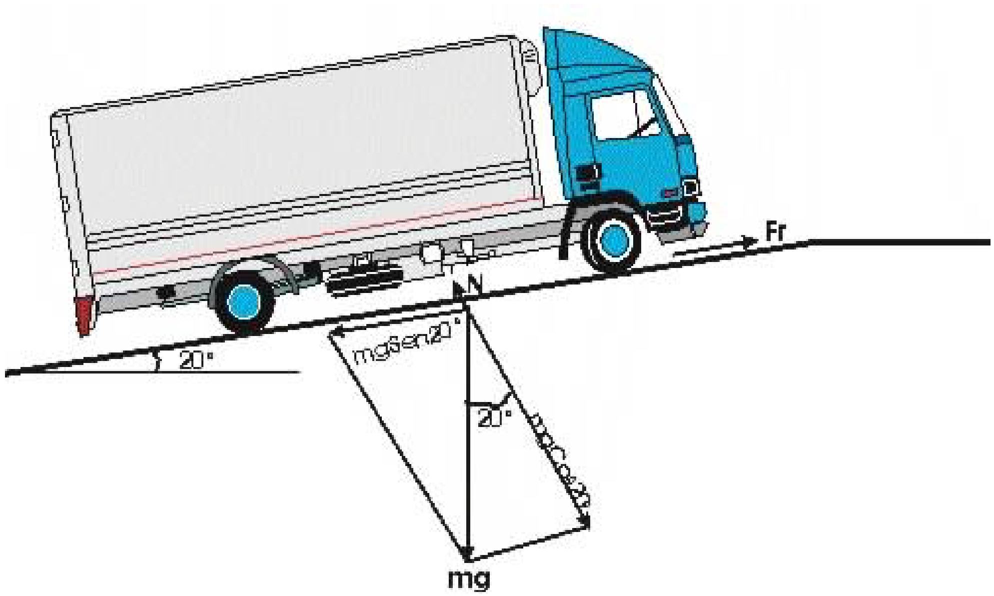
$v_f^2 = v_0^2 + 2a \cdot d$; sustituyendo valores: $v_f = \sqrt{(5\frac{m}{seg})^2 - 2(1.04\frac{m}{seg^2})(5m)}$

siendo la velocidad $v_f = 3.82\frac{m}{seg}$ Resultado

Paso 3. La distancia que recorre el paquete hasta llegar a detenerse:

$v_f^2 = v_0^2 + 2a \cdot d$; despejando y sustituyendo valores: $d = \frac{-v_o^2}{2\,a} = \frac{-(5\frac{m}{seg})^2}{2(-1.04\frac{m}{seg^2})} = 12\,m$ **De solución**

PROBLEMA 2.2.5. Un camión sube por una pendiente de 20^o con respecto a la horizontal, con una velocidad constante de $12\frac{m}{seg}$. ¿Cuál será la aceleración del camión al llegar al plano horizontal de la carretera?



Paso 1. Como la velocidad se mantiene constante en el plano inclinado, entonces las únicas dos fuerzas que intervienen son:

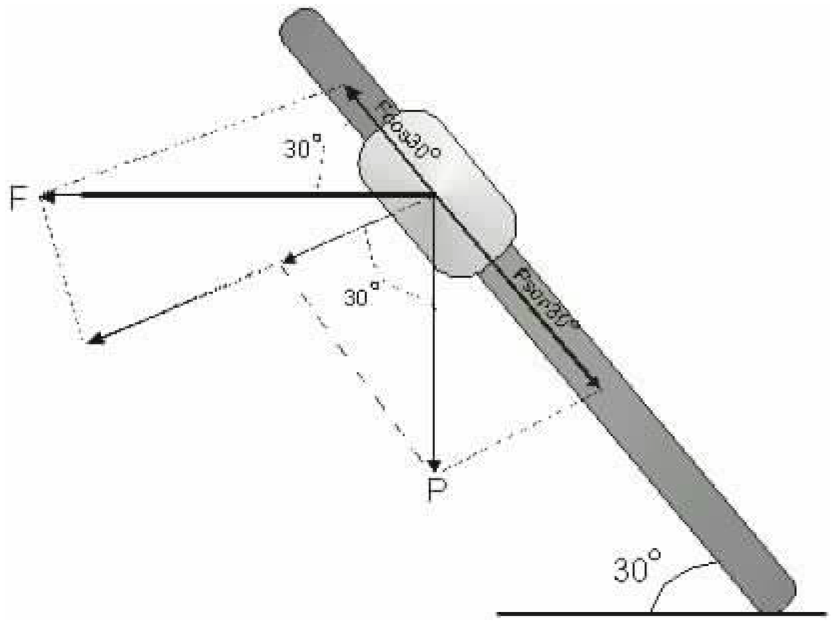
$\sum F = -M \cdot g \cdot Sen\theta + F_r = 0$; $\boxed{F_r = M \cdot g \cdot Sen\theta}$ estas dos fuerzas son iguales por lo que la velocidad se mantiene constante; como se desconoce el coeficiente de rozamiento, en lugar de la fuerza de rozamiento utilizaremos su equivalente que es la fuerza componente del peso del camión $M \cdot g \cdot Sen\theta$.

Paso 2. En el instante en que el camión llega al camino horizontal:

$\boxed{M \cdot g \cdot Sen\theta = M \cdot a}$; por lo que la aceleración es: $\boxed{a = g \cdot Sen\theta}$;

$a = 9.8 \frac{m}{seg^2} Sen20^o = 3.35 \frac{m}{seg^2}$ **De solución**

PROBLEMA 2.2.6. Cuando un collarín de peso P=10Newtons, se mueve hacia abajo sobre una barra guía, con una velocidad de $4 \frac{m}{seg}$, se aplica una fuerza F al cable para detener al collarín. Determinar la magnitud de la fuerza F si el collarín alcanza a recorrer 2m sobre la barra.



Paso 1. Aplicando la segunda ley de Newton y tomando en cuenta el diagrama de cuerpo libre de la figura, se consideran positivas las fuerzas en el sentido del movimiento: $\boxed{PSen30^{o} - FCos30^{o} = M \cdot a}$;

Paso 2. De acuerdo con los datos, la aceleración del collarín se determina con la relación: $\boxed{v_f^2 = v_0^2 + 2a \cdot d}$;

sustituyendo los valores y despejando la aceleración:

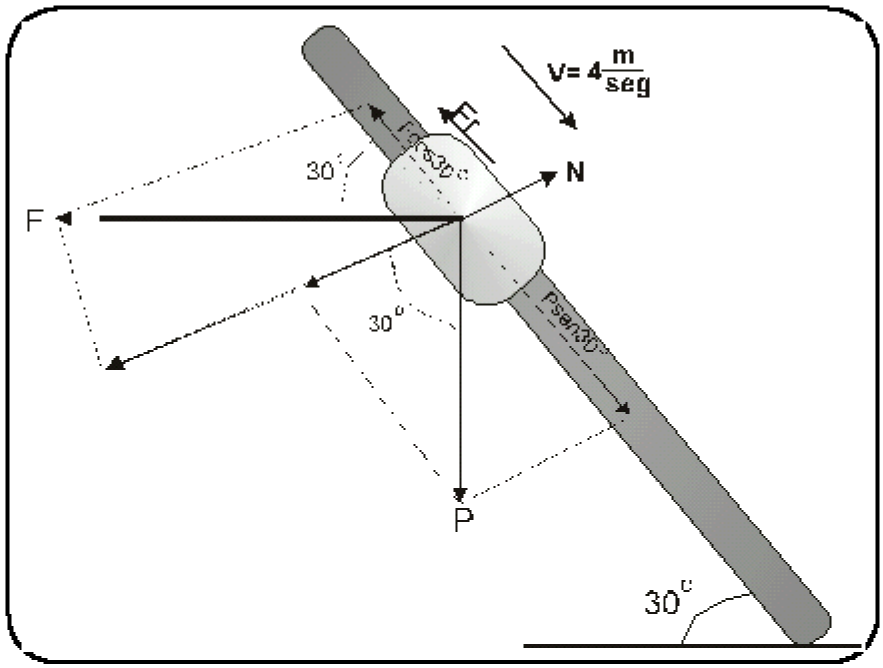
$$0 = (4\frac{m}{seg})^2 + 2a \cdot 2m\,;\ a = \frac{-16\frac{m^2}{seg^2}}{4m} = -4\frac{m}{seg^2}\,;$$

Paso 3. Sustituyendo los valores y sabiendo que la masa del collarín es $M = \frac{10N}{g}$; tenemos:

$$10NSen30^{o} - FCos30^{o} = \frac{10N}{9.8\frac{m}{seg^2}}(-4\frac{m}{seg^2})\,;\ F = \frac{\frac{40N}{9.8} + 10NSen30^{o}}{Cos30^{o}} = \frac{9.08N}{0.86} = 10.48Newt$$

.De sol.

PROBLEMA 2.2.7. Cuando un collarín de peso P=10Newtons, se mueve hacia abajo sobre una barra guía, con una velocidad de $4\frac{m}{seg}$, se aplica una fuerza F al cable para detener al collarín. Determinar la magnitud de la fuerza F si el collarín alcanza a recorrer 2m sobre la barra, y el coeficiente cinético de rozamiento entre la barra y el collarín es de 0.2.



Paso 1. De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre de la figura, aplicamos la segunda ley de Newton, considerando positivas las fuerzas en el sentido del movimiento:

$\sum F = M \cdot a$; $\boxed{PSen30^o - FCos30^o - \mu_K \cdot N = M \cdot a}$; siendo N la fuerza normal a la barra de la componente del peso del collarín, que tiene un valor de N=PCos30^o ; la masa del collarín es m, y su valor es de $M = \frac{P}{g}$; por lo que sustituyendo valores se tiene:

$$10\,newtons \cdot Sen30^o - FCos30^o - 0.2(10\,newtons)Cos30^o = \frac{10\,newtons}{9.8\frac{m}{seg^2}} \cdot a$$

$$5\,newtons - 0.866F - 1.732\,newtons = 1.02\frac{newtons}{\frac{m}{seg^2}} \cdot a \quad ;$$

$$3.268\,newtons - 0.866F = 1.02\frac{newtons}{\frac{m}{seg^2}} \cdot a$$

Paso 2. Como se tienen dos incógnitas, la aceleración la podemos calcular con la ecuación:

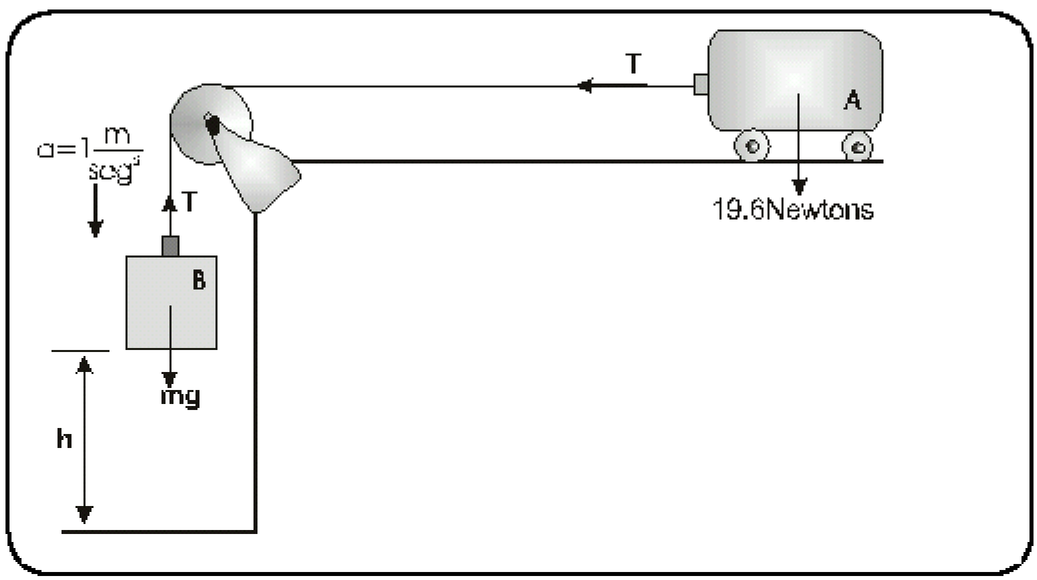
$v_f^2 = v_0^2 + 2a \cdot d$; sustituyendo valores: $a = \frac{-(4\frac{m}{seg^2})^2}{2(2m)} = -4\frac{m}{seg^2}$.

Paso 3. Ahora podemos calcular la magnitud de la fuerza F, por lo que

sustituyendo valores, tenemos: $3.268\,newtons - 1.02\frac{newtons}{\frac{m}{seg^2}}(-4\frac{m}{seg^2}) = 0.866F$;

$F = 8.48\,newtons$. **De solución.**

PROBLEMA 2.2.8. Cuando el sistema que se indica en la figura parte del reposo y se mueve sin rozamiento, determinar la tensión de la cuerda y el peso del bloque B, si: a) el sistema adquiere una aceleración de $1\frac{m}{seg^2}$; b) el bloque B llega al piso con una velocidad de $2\frac{m}{seg}$ cuando desciende un metro.



Paso 1. Aplicando la segunda ley de Newton al bloque A, y considerando

Positivas las fuerzas en el sentido del movimiento del bloque A, se tiene:

$F = M_A \cdot a_A$; la fuerza que se aplica la bloque A es la tensión de la cuerda , y la masa del bloque A es:

$M_A = \frac{peso A}{g} = \frac{W_A}{g}$; por lo que tenemos para el bloque A:

$T = M_A \cdot a_A$; siendo T la tensión de la cuerda, y la aceleración del bloque A es la misma para el bloque B, por lo que conviene expresar: $\boxed{T = M_A \cdot a}$

Paso 2. Aplicamos ahora la segunda ley de Newton al bloque B, considerando positivas la fuerzas en el sentido del movimiento del bloque B, y de acuerdo con el diagrama de cuerpo libre: $\sum F = M_B \cdot a_B$; como la única fuerza que se aplica al bloque B es la de la tensión de la cuerda, y es la misma que se aplica en el bloque A, pero además, en la suma de fuerzas se debe considerar el peso del bloque, se tiene: $T - m_B \cdot g = m_B \cdot a_B$; además, la aceleración es la misma para ambos bloques, por lo que: $\boxed{T - M_B \cdot g = M_B \cdot a}$

Paso 3. Sustituyendo el valor de la tensión del bloque A en la ecuación del bloque B, se tiene:

$M_A \cdot a - M_B \cdot g = M_B \cdot a$; como se pregunta por el peso del bloque B, ordenando :

$M_A \cdot a = M_B \cdot a + M_B \cdot g$; $M_B(a+g) = M_A \cdot a$; $\boxed{M_B = \frac{M_A \cdot a}{a+g}}$; $M_B = \frac{19.6\,\text{newtons}}{(1+9.8)\frac{m}{seg^2}} = 1.81\,\text{kg}$

Paso 4. Por lo que el peso del bloque B, es :

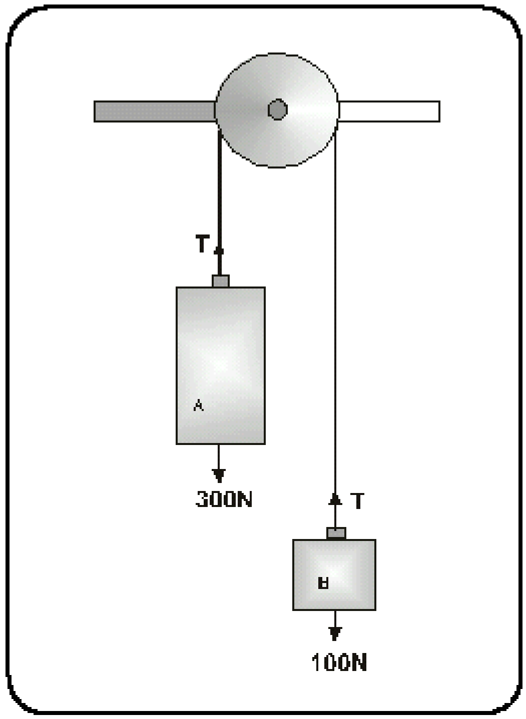
$W_B = M_B \cdot g = 1.81\,\text{kg}(9.8\frac{m}{seg^2}) = 17.73\,\text{newtons}$ Resultado.

La tensión de la cuerda, es: $T = M_A \cdot a = 19.6\,\text{newtons}$ Resultado.

También se puede comprobar con la expresión:

$\boxed{T = M_B \cdot a + M_B \cdot g}$; $T = 1.81\text{kg} \cdot 1\frac{m}{seg^2} + 17.73\text{newtons} = 19.54\,\text{newtons}.$ De solución.

PROBLEMA 2.2.9. En el sistema representado en la figura, el bloque A tiene un peso de 300 newtons, el bloque B pesa 100 newtons, si no hay rozamiento en la polea y el sistema parte del reposo, determinar: a) la aceleración del bloque A; b) la tensión de la cuerda; c) la velocidad del bloque A cuando ha descendido 2m; d) la velocidad del bloque A al cabo de 3 segundos.



Paso 1. Aplicando la segunda ley de Newton al diagrama de cuerpo libre del bloque A y considerando positivas la fuerzas en el sentido del movimiento del bloque A:

$\sum F = M_A \cdot a$; sustituyendo valores: $\boxed{300N - T = M_A \cdot a}$; la tensión T de la cuerda y la aceleración es la misma para ambos bloques.

Paso 2. Aplicando la segunda ley de Newton al diagrama de cuerpo libre del bloque B y considerando positivas las fuerzas en el sentido del movimiento del bloque B:

$\sum F = M_B \cdot a$; sustituyendo valores: $\boxed{T - 100N = M_B \cdot a}$; despejando la tensión de la cuerda y sustituyéndola en la ecuación obtenida para el bloque A:

$$300N - (M_B \cdot a + 100N) = M_A \cdot a$$

despejando la aceleración:

$$300N - 100N = a(M_A + M_B);\ a = \frac{200N}{\frac{300N+100N}{9.8\frac{m}{seg^2}}} = 4.9\frac{m}{seg^2}$$

Resultado

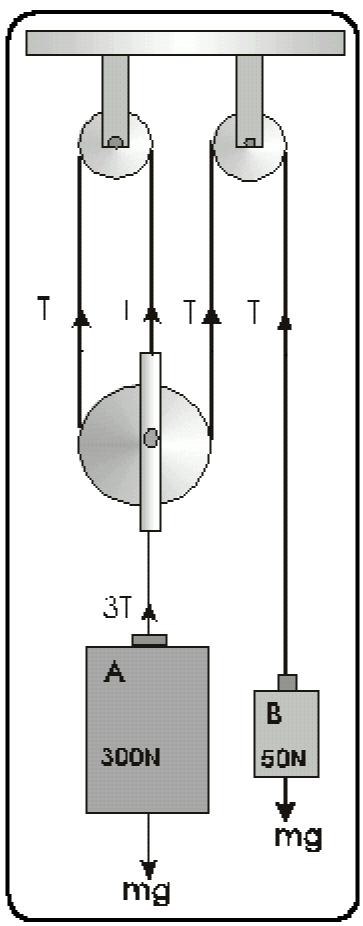
Paso 3. La tensión de la cuerda, es:

$$T = M_B \cdot a + 100N \; ; \; T = \frac{100N}{9.8\frac{m}{seg^2}}(4.9\frac{m}{seg^2}) + 100N = 150N$$ Resultado

Paso 4. Para determinar la velocidad del bloque A al cabo de los 3 segundos, que será la misma magnitud para el bloque B:

$$v_f = v_0 + a \cdot t \; ; \; v_{fA} = 0 + 4.9\frac{m}{seg^2}(3seg) = 14.7\frac{m}{seg}$$ **De solución**

PROBLEMA 2.2.10. El sistema que se indica parte del reposo, si no hay ningún tipo de rozamiento y la polea es de peso despreciable, determinar: a) la tensión de la cuerda, b) la aceleración de los bloques, c) la velocidad de los bloques al cabo de 3 segundos.



Paso 1. Aplicando la segunda ley de Newton al diagrama de cuerpo libre del bloque A, y considerando positivas las fuerzas en el sentido del movimiento del bloque A:

$\sum F = M_A \cdot a_A$; $\boxed{300N - 3T = M_A \cdot a_A}$

despejando a T:

$T = (300N - M_A \cdot a_A)\ \frac{1}{3}$; $T = (300N - \frac{300N}{9.8\frac{m}{seg^2}} \cdot a_A)\frac{1}{3}$

$T = 100N - 10.20\frac{N}{\frac{m}{seg^2}} \cdot a_A$

Paso 2. Aplicando la segunda ley de Newton al diagrama de cuerpo libre del bloque B y considerando positivas las fuerzas en el sentido del movimiento del bloque B: $\sum F = M_B \cdot a_B$; $\boxed{T - 50N = M_B \cdot a_B}$

Paso 3. Relación de desplazamientos: si el bloque A desciende 1m, el bloque B sube 3m; por lo que la relación de desplazamiento es de: $S_B = 3S_A$; la relación de velocidades es de: $V_B = 3V_A$; la relación de aceleraciones, es : $\boxed{a_B = 3a_A}$

Paso 4. Sustituyendo el valor de la tensión obtenida anteriormente, en la ecuación del bloque B: $300N - 30.61\frac{N}{\frac{m}{seg^2}} \cdot a_A - 50N = M_B \cdot a_B$; sustituyendo el valor de la aceleración de B:

$100N - 10.20\frac{N}{\frac{m}{seg^2}} \cdot a_A - 50N = M_B \cdot 3a_A$;

despejando la aceleración:

$50N = 3a_A(\frac{50N}{9.8\frac{m}{seg^2}}) + (10.2\frac{N}{\frac{m}{seg^2}})a_A$; $50N = 25.5a_A$

$a_A = 1.96\frac{m}{seg^2}$ Resp ; $a_B = 3a_A = 3(1.96\frac{m}{seg^2}) = 5.88\frac{m}{seg^2}$ Resp

Paso 5. Para calcular la velocidad de los bloque a los 3seg: $V_f = V_0 + a \cdot t$

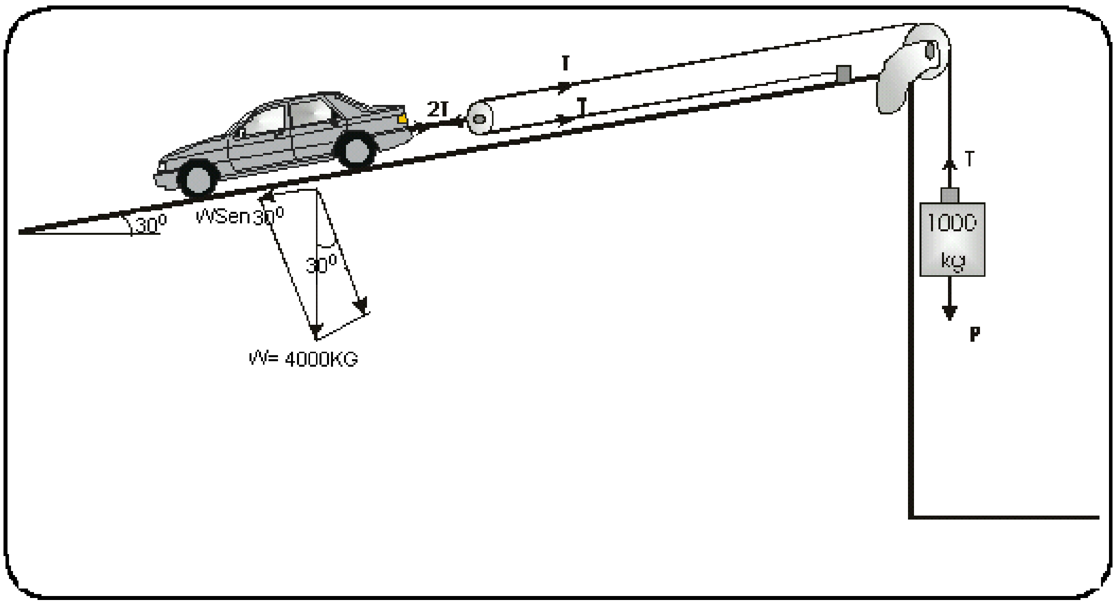
para el bloque A:

$V_{fA} = 1.96\frac{m}{seg^2}(3seg) = 5.68\frac{m}{seg}$ Resultado.

Para el bloque B:

$V_{fB} = 5.88\frac{m}{seg^2}(3seg) = 17.64\frac{m}{seg}$ **De solución.**

PROBLEMA 2.2.11. Un auto que peso 4000 kg, se desea subir por un plano inclinado como lo indica la figura. Si no hay rozamiento y el auto parte del reposo, determinar la magnitud de la fuerza P que se debe aplicar al contrapeso para que el auto adquiera una velocidad de $1\frac{m}{seg}$ cuando haya subido 10m por el plano inclinado.



Paso 1. Aplicando la segunda ley de Newton al diagrama de cuerpo libre del auto y considerando positivas las fuerzas en el sentido del movimiento del auto:

$\sum F = M_A \cdot a_A$; $\boxed{2T - 4000\,kg\,Sen30^0 = M_A \cdot a_A}$

Paso 2. Aplicando la segunda ley de Newton al diagrama de cuerpo libre del contrapeso y considerando positivas las fuerzas en el sentido del movimiento del contrapeso: $\sum F = M_{cp} \cdot a_{cp}$; $\boxed{P + 1000\,kg - T = M_{cp} \cdot a_{cp}}$

Paso 3. Relación de movimientos: si el auto sube 1m, el contrapeso baja 2m ; por la que la relación de desplazamientos, es: $S_{cp} = 2S_A$; la relación de velocidades, es: $a_{cp} = 2a_A$;

la relación de aceleraciones, es: $\boxed{a_{cp} = 2a_A}$ **Paso 4.** Despejando la tensión T de la ecuación del contrapeso y sustituyéndola en la ecuación del auto:

$T = P + 1000\,kg - M_{cp} \cdot a_{cp}$;

$2(P + 1000\,kg - M_{cp} \cdot a_{cp}) - 4000\,kg\,Sen30^o = M_a \cdot a_A$; sustituyendo $a_{cp} = 2a_A$:

$2P + 2000\,kg - 2M_{cp}(2a_A) - 2000\,kg = M_A \cdot a_A$; $2P = a_A(M_A + 4M_{cp})$

Paso 5. Vamos ahora, a calcular la aceleración del auto: $v_f^2 = v_0^2 + 2a \cdot d$;

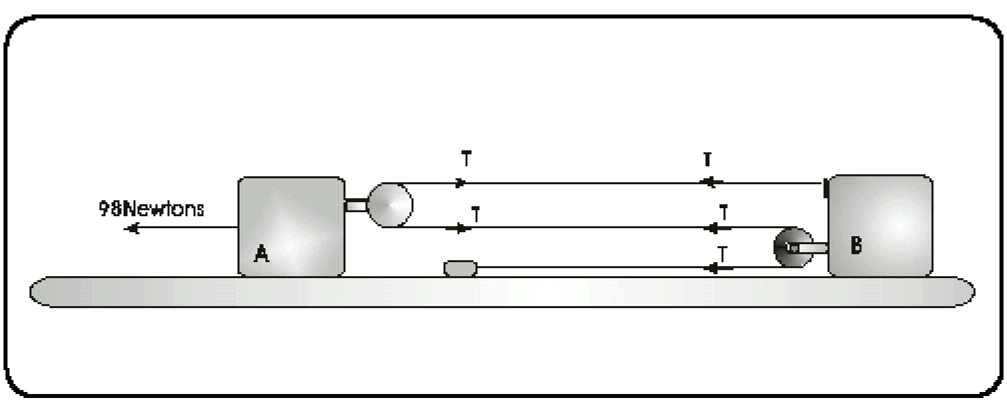
$$a_A = \frac{(1\frac{m}{seg})^2}{2(10m)} = 0.05\frac{m}{seg^2}$$

Paso 6. Calculando la magnitud de la fuerza P: $P = \dfrac{0.05\frac{m}{seg^2}\left(\dfrac{4000kg+4(1000kg)}{9.8\frac{m}{seg^2}}\right)}{2} = 20.4\,kg$
Resultado

Paso 7. Para calcular la tensión de la cuerda: $T = P + 1000\,kg - M_{cp} \cdot a_{cp}$;

$$T = 20.4\,kg + 1000\,kg - \frac{1000\,kg}{9.8\frac{m}{seg^2}}(0.1\frac{m}{seg^2}) = 1010.2\,kg$$ **De solución.**

PROBLEMA 2.2.12. El sistema que se indica en la figura, se encuentra en reposo cuando se aplica al bloque A una fuerza instantánea de 98 newtons, si no hay rozamiento y el peso de cada bloque es de 10 kg, determinar: a) la aceleración de cada bloque, b) la tensión de la cuerda.



Paso 1. Relación de movimientos: si el bloque B se mueve 1m hacia la izquierda, el bloque A se debe mover 1.5m hacia la izquierda, por lo que la relación de desplazamientos, es: $S_A = 1.5S_B$; la relación de velocidades es: $V_A = 1.5V_B$; la relación de aceleraciones es: $\boxed{a_A = 1.5a_B}$

Paso 2. Aplicando la segunda ley de Newton al diagrama de cuerpo libre del bloque A, y considerando positivas las fuerzas en el sentido del movimiento:

$\sum F = M_A \cdot a_A$;

$\boxed{98N - 2T = M_A \cdot a_A}$ **Paso 3.** Aplicando la segunda ley de Newton al diagrama de cuerpo libre del bloque B y considerando positivas las fuerzas en el sentido del movimiento:

$\sum F = M_B \cdot a_B$; $\boxed{3T = M_B \cdot a_B}$; despejando la tensión T y sustituyéndola en la ecuación del bloque A: $T = \frac{M_B a_B}{3}$; $98N - 2(\frac{M_B a_B}{3}) = M_A \cdot a_A$; como la masa de ambos bloques es la misma, y sustituyendo $a_A = 1.5a_B$; se tiene:

$980N - \frac{2}{3}M \cdot a_B = M(1.5a_B)$; $98N = M(1.5a_B + \frac{2}{3}a_B)$

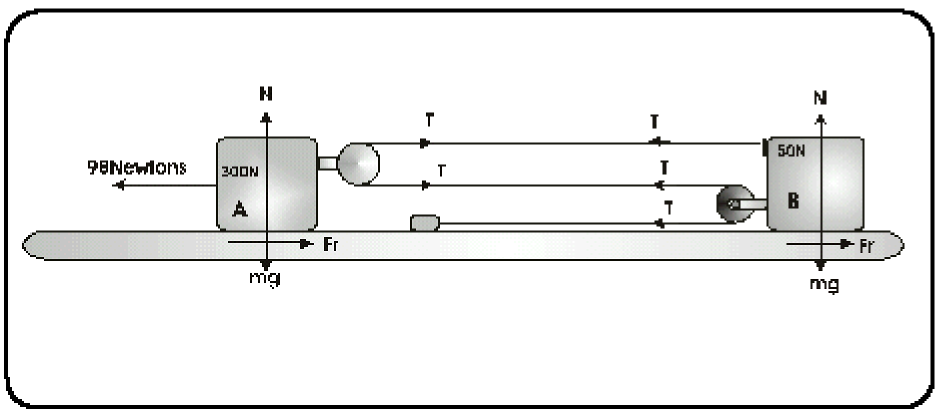
tomando en cuenta que la masa de cada bloque es: $M = \frac{peso}{g} = \frac{10kg}{9.8\frac{m}{seg^2}}$ donde el peso está expresado en kilogramos fuerza, y un kilogramo fuerza equivale a 9.8 newtons, por lo que $98N = \frac{98N}{9.8\frac{m}{seg^2}}(2.167a_B)$; $a_B = 4.52\frac{m}{seg^2}$ Resultado

$a_A = 1.5a_B = 1.5(4.52) = 6.78\frac{m}{seg^2}$ Resultado

Paso 4. La tensión de la cuerda, resulta: $T = \frac{M_B a_B}{3}$; recordar que un cuerpo que pesa 10 kg tiene una masa de 10 kg; desafortunadamente el símbolo de la unidad de peso es el mismo que para la unidad de masa, por lo que conviene diferenciarlos indicando al símbolo de kilogramo peso como kilogramo fuerza , mediante un subíndice: kg_f;

La tensión de la cuerda : $T = \frac{M_B \cdot a_B}{3} = \frac{10kg(4.52\frac{m}{seg^2})}{3} = 15 \text{ newtons}$ **De solución.**

PROBLEMA 2.2.13. En el sistema que se indica en la figura, el bloque A pesa 300 newtons, el bloque B pesa 50 newtons, el coeficiente cinético de rozamiento entre los bloques y la superficie de contacto es de 0.2; considerar que no hay rozamiento en las poleas. Si el sistema parte del reposo y se aplica una fuerza instantánea de 98 newtons, determinar: a) la aceleración de cada bloque, b) la tensión de la cuerda.



Paso 1. Aplicando la segunda ley de Newton en el bloque A, considerando positivas las fuerzas en el sentido del movimiento de A:

$\sum F = M_A \cdot a_A$; $\boxed{98N - 2T - F_{rA} = M_A \cdot a_A}$;

Paso 2. Como la magnitud de la fuerza de rozamiento Fr ,es el coeficiente de rozamiento multiplicado por la fuerza normal, es decir, la fuerza perpendicular a la superficie de contacto, se tiene que $F_{rA} = \mu_K \cdot N$; $F_{rA} = 0.2(300N) = 60\text{newtons}$.

No confundir el símbolo N de la unidad de fuerza llamada Newton, con la fuerza normal que se representa también con la letra N.

Paso 3. Aplicando la segunda ley de Newton e el bloque B y considerando positivas las fuerzas en el; sentido del movimiento de B: $\boxed{3T - F_{rB} = M_B \cdot a_B}$; la fuerza de rozamiento en el bloque B, es de $F_{rB} = 0.2(50N) = 10newtons$; despejando la tensión y sustituyéndola en la ecuación del bloque A:

$T = \frac{M_B a_B + 10N}{3}$; $98N - 2(\frac{M_B \cdot a_B + 10N}{3}) - 60N = M_A \cdot a_A$; sustituyendo la relación de aceleraciones $a_A = 1.5a_B$; se tiene:

$98N - \frac{2}{3}(M_B \cdot a_B + 10N) - 60N = M_A(1.5a_B)$; despejando la aceleración a_B :

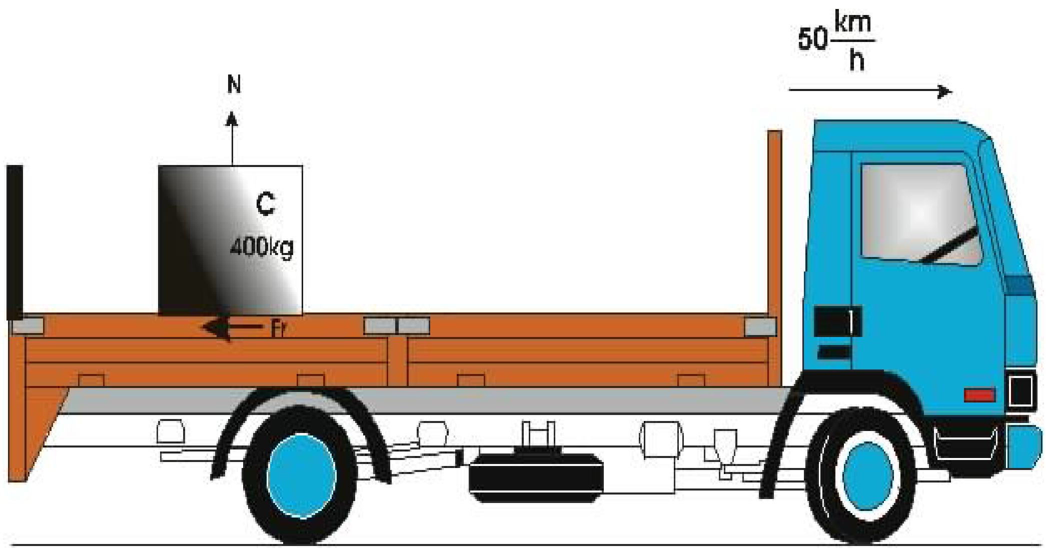
$31.33N = 1.5M_A \cdot a_B + 0.67M_B \cdot a_B$; $31.33N = a_B(1.5M_A + 0.67M_B)$; $a_B = \frac{31.33N}{1.5M_A + 0.67M_B}$;

$a_B = \frac{31.33N}{\frac{1.5(300N)+0.67(50N)}{9.8\frac{m}{seg^2}}} = 0.63\frac{m}{seg^2}$ Resultado

La aceleración de A: $a_A = 1.5a_B = 1.5(0.63) = 0.94\frac{m}{seg^2}$ Resultado

Paso 4. La tensión de la cuerda: $T = \frac{M_B + 10N}{3} = \frac{\frac{50N}{9.8\frac{m}{seg^2}} + 10N}{3} = 5\,newtons$ **De solución.**

PROBLEMA 2.2.14. Un camión aplica los frenos en el instante en que su velocidad es de $50\frac{km}{h}$, el coeficiente de rozamiento estático entre la plataforma y la carga que transporta, es de 0.5. Determinar la distancia mínima en la cual el camión deberá detenerse para que la carga esté a punto de deslizarse.



PASO 1. Aplicando la segunda ley de Newton al diagrama de cuerpo libre de la carga, y considerando positivas las fuerzas en el sentido del movimiento:

$$\sum F = M_c a_c$$

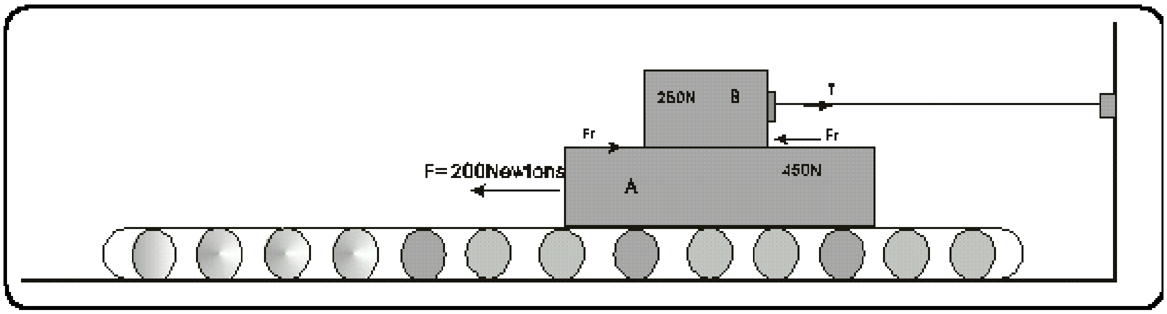
$\boxed{-F_r = M_c a_c}$; $-0.5(400kg) = \frac{400kg_f}{9.8\frac{m}{seg^2}} \cdot a_c$; $a_c = -4.9\frac{m}{seg^2}$; es el valor máximo de la desaceleración de la carga para la cual está a punto de deslizarse, y debe ser el mismo valor para la desaceleración del camión.

Paso 2. La distancia mínima en la cual el camión se debe detener, es:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a \cdot d$$

$d = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{-(50 \cdot 0.2778\frac{m}{seg})^2}{2(-4.9\frac{m}{seg^2})} = 19.68m$ **De solución.**

PROBLEMA 2.2.15. Los bloques que se indican en la figura se encuentran en reposo cuando se aplica al bloque A una fuerza instantánea de 200 newtons. Si el coeficiente de rozamiento entre los bloques es de 0.5, y no hay rozamiento entre el bloque A y la banda transportadora; determinar: a) la aceleración de bloque A, b) la aceleración del bloque B, si no hay cuerda que lo sujete.



Paso 1. Aplicando la segunda ley de Newton al bloque A:

$$\sum \overset{+\leftarrow}{F} = M_A \cdot a_A \; ; \; \boxed{200N - F_r = M_A \cdot a_A} \; ;$$

sustituyendo valores:

$$200N - 0.5(250N) = \frac{450N}{9.8\frac{m}{seg^2}} \cdot a_A \; ; \; 75N = 45.9\frac{N}{\frac{m}{seg^2}} \cdot a_A \; ; \; \overleftarrow{a_A} = 1.63\frac{m}{seg^2}$$ Resultado.

Paso 2. Resolviendo el problema cuando el bloque B no se encuentra atado a la cuerda: si suponemos que el bloque B no se desliza y por lo tanto se mueve junto con el bloque A: $\sum \overset{+\leftarrow}{F} = M_{AB} \cdot a_{AB} \; ; \; 200N = \frac{700N}{9.8\frac{m}{seg^2}} \cdot a_{AB} \; ; \; \overset{+\leftarrow}{a_{AB}} = 2.8\frac{m}{seg^2}$; en éstas condiciones analizando el bloque B:

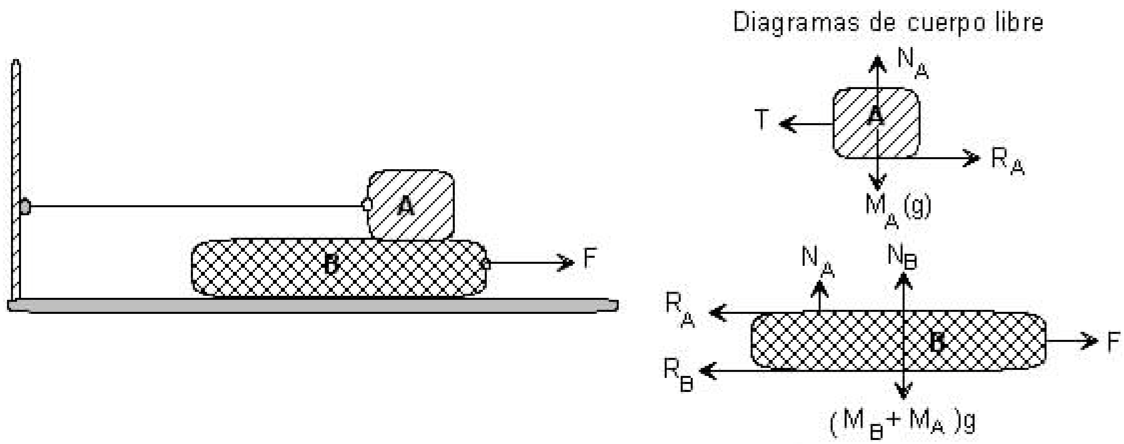
$$\overset{+\leftarrow}{F} = M_B \cdot a_B \; ; \; F = \frac{250N}{9.8\frac{m}{seg^2}}(2.8\frac{m}{seg^2}) = 71.41 newtons$$

esta es la fuerza que actuaría sobre el bloque B, como la fuerza máxima posible que puede actuar es la fuerza de rozamiento, en el caso que si hubiera deslizamiento, la cual tiene un valor de $F_r = 0.5(250N) = 125N$; como 71.41N<125N ; resulta que el bloque B no se desliza. **De solución.**

Nota: si hubiese resultado que F>Fr ; lo cual concluiría la imposibilidad de que el sistema se moviesen juntos, y entonces el bloque B se deslizaría sobre el bloque A; y se haría el siguiente análisis:

$$\sum \overset{+\leftarrow}{F} = M_B \cdot a_B \; ; \; F_r = M_B \cdot a_B \; ; \; 0.5(250N) = \frac{250N}{9.8\frac{m}{seg^2}} \cdot a_B \; ; \; 125N = 25.51\frac{N}{\frac{m}{seg^2}} \cdot a_B \; ; \; \overleftarrow{a_B} = 4.9\frac{m}{seg^2}$$

PROBLEMA 2.2.16. En el sistema representado en la figura, la cuerda es de peso despreciable, la masa del cuerpo A es de 1kg, la masa del cuerpo B es de 4 kg, el coeficiente de rozamiento dinámico μ en todas las superficies de contacto es de 0.3. Determinar la fuerza necesaria para que la aceleración del bloque B sea de $0.2\frac{m}{seg^2}$ y la tensión de la cuerda en ésas condiciones.



Paso 1. Analizando cada cuerpo y representando las fuerzas que actúan en el diagrama de cuerpo libre, en el bloque A: fuerza de rozamiento $R_A = \mu \cdot N_A$;

$N_A = M_A \cdot g$;

fuerza de rozamiento $R_A = \mu \cdot M_A \cdot g = 0.3 \cdot 1kg \cdot 9.8\frac{m}{seg^2} = 2.9\frac{kg \cdot m}{seg^2} = 2.9 \text{ newtons}$

La tensión de la cuerda: $T=R_A=2.9$ newtons.

Paso 2. En el bloque B: la fuerza de rozamiento en la parte inferior del bloque es producida por el peso de los dos bloques ,

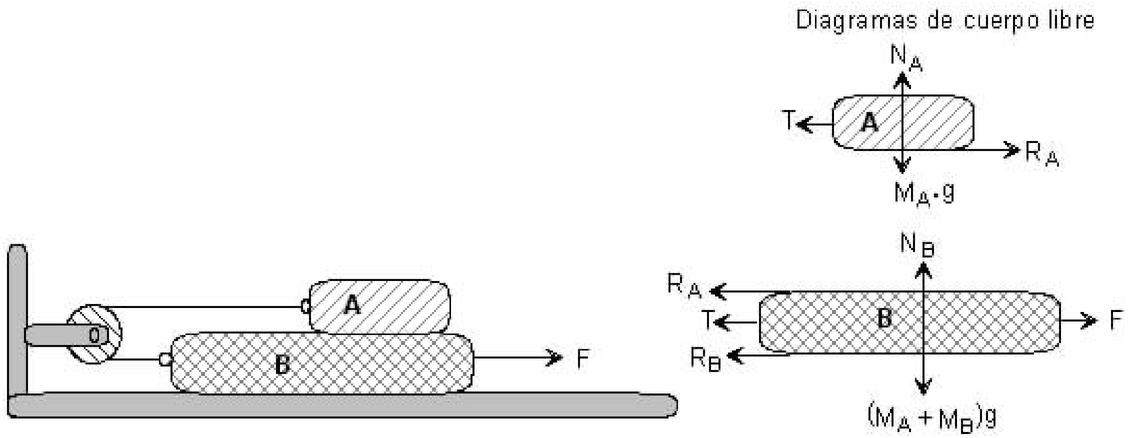
$$R_B = \mu \cdot N_B\ ;\ N_B = (M_A + M_B)g\ ;\ R_B = 0.3(1kg + 4kg)9.8\frac{m}{seg^2} = 14.7 \text{ newtons}.$$

Paso 3. Al aplicar la fuerza F se oponen a ella las dos fuerzas de rozamiento, las originadas en la parte inferior y en la parte superior del bloque B; por lo que aplicando la segunda ley de Newton en las fuerzas que actúan en el bloque B y considerando positivas las fuerzas que actúan hacia la derecha: $\sum \vec{F} = M \cdot a$;

$F - R_A - R_B = M_B \cdot a$; se tiene:

$F = R_A + R_B + M_B \cdot a = 2.9N + 14.7N + 3kg \cdot 0.2\frac{m}{seg^2} = 18.2$ newtons. **De solución.**

PROBLEMA 2.2.17. En el sistema representado en la figura, la cuerda es de peso despreciable y la polea no tiene rozamiento, el peso del bloque A es de 0.5 kg y el del bloque B es de 1.5 kg, el coeficiente cinético de rozamiento entre todas las superficies es de 0.4. Calcular la tensión de la cuerda y la aceleración de los bloques cuando se aplica una fuerza instantánea de 13 newtons.



Paso 1. De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre del bloque A :

$R_A = \mu \cdot N_A$; $N_A = M_A \cdot g$;

$R_A = \mu \cdot M_A \cdot g = 0.4 \cdot 0.5kg \cdot 9.8\frac{m}{seg^2} = 1.96$ newtons. Aplicando la segunda ley de Newton al bloque A y considerando positivas las fuerzas en el sentido del movimiento, es decir hacia la izquierda:

$\sum \overset{+\leftarrow}{F} = M \cdot a$; $T - R_A = M_A \cdot a$; $T - 1.96N = 0.5kg \cdot a$

Paso 2. Para encontrar el valor de la tensión de la cuerda T y de la aceleración a, se debe analizar el bloque B,

pero antes, es conveniente despejar T : $\boxed{T = 1.96N + 0.5kg \cdot a}$

Paso 3. De acuerdo al diagrama de cuerpo libre del bloque B:

$R_B = \mu \cdot N_B$; $N_B = (M_A + M_B)g$ $R_B = 0.4(0.5kg + 1.5kg)9.8\frac{m}{seg^2} = 7.84$ newtons.

Paso 4. Aplicando la segunda ley de Newton al bloque B y considerando

positivas las fuerzas que actúan en el sentido del movimiento, es decir hacia la derecha:

$\sum \vec{F} = M_B \cdot a$; $F - T - R_A - R_B = M_B \cdot a$; sustituyendo en esta ecuación el valor de T

obtenido anteriormente y los demás valores conocidos :

$$13\,N - (1.96\,N + 0.5kg \cdot a) - 1.96\,N - 7.84\,N = 1.5kg \cdot a$$

Despejando la aceleración: $a = \frac{1.24\,N}{1kg} = \frac{1.24\,\frac{kg \cdot m}{seg^2}}{1kg} = 1.24\frac{m}{seg^2}$ **De solución.**

La tensión de la cuerda es: $T = 1.96\,N + 0.5kg \cdot 1.24\frac{m}{seg^2} = 2.58\,N$ **De solución.**

Unidad 3

Trabajo, energía cinética y conservación de la energía

Objetivo Educacional:

Aplicara los conceptos de trabajo y energía en la solución de problemas de movimiento de los cuerpos

3 TRABAJO, ENERGÍA CINÉTICA Y CONSERVACIÓN DE ENERGÍA

3.1 CONCEPTO DE TRABAJO

Trabajo se define como la productividad que la energía puede proporcionar al ser aplicada sobre un cuerpo por unidad de tiempo. En esencia, decimos que existe trabajo cuando se produce cierto desplazamiento por la energía aplicada. Si se empuja una pared no se realiza ningún trabajo ya que la pared permanece en la misma posición; en contraparte si se empuja un vagón, este presenta cierto desplazamiento por lo que se considera que existe trabajo (se obtuvo un producto al aplicar energía).Es la aplicación de una fuerza que provoca un movimiento.

En mecánica el **trabajo** efectuado por una fuerza aplicada sobre un cuerpo durante un cierto desplazamiento se define como la integral del producto escalar del vector fuerza por el vector desplazamiento. El trabajo es una magnitud física escalar, y se representa con la letra W(del inglés **W**ork) o L(de *Labor*) para distinguirlo de la magnitud temperatura, normalmente representada con la letra T.

$$W = F \cdot d$$

En termodinámica el trabajo que se realiza cuando un gas se expande o se comprime ejerciendo una presión desde un volumen A hasta otro volumen B viene dado por

$$W_{AB} = -\int_A^B PdV$$

El trabajo es, en general, dependiente de la trayectoria y, por lo tanto, no constituye una variable de estado. La unidad básica de trabajo en el Sistema Internacional es newton × metro y se denomina joule o julio, y es la misma unidad que mide la energía. Por eso se entiende que la energía es la capacidad para realizar un trabajo o que el trabajo provoca una variación de energía.

3.1.1 Calculo del trabajo para diferentes fuerzas.

Para encontrar y calcular el trabajo que una fuerza realiza a lo largo de una trayectoria curvilínea se utiliza el cálculo diferencial. El trabajo que la fuerza realiza en un elemento diferencial $d\vec{r}$ de la trayectoria es

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_T dr$$

donde F_T indica la componente tangencial de la fuerza a la trayectoria, debido a las propiedades del producto escalar. Por eso una fuerza que actúa perpendicular al desplazamiento no realiza trabajo.

Para calcular el trabajo a lo largo de una trayectoria entre los puntos A y B basta con integrar entre los puntos inicial y final de la curva:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Es decir, matemáticamente el trabajo es una integral de línea.

Hay casos en los que el cálculo del trabajo es particularmente sencillo. Si el módulo de la fuerza es constante y el ángulo que forma con la trayectoria también es constante tendremos: Fuerza (F) por distancia (d) será igual a Trabajo (W).

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

Esto es por ejemplo una fuerza constante y una trayectoria rectilínea.

Fuerza paralela a una trayectoria rectilínea

Si además la fuerza es paralela al desplazamiento tendremos:

$$W = Fd$$

Y si la fuerza es anti paralela al desplazamiento:

$$W = -Fd$$

Si sobre una partícula actúan varias fuerzas y queremos calcular el trabajo total realizado sobre esta partícula, entonces $\vec{F}$ representa al vector resultante de todas las fuerzas aplicadas.

Relación entre trabajo y energía

También se llama trabajo a la energía usada para deformar o desplazar un cuerpo contra una resistencia o aceleración o, en general, alterar la energía de cualquier sistema físico. El concepto de trabajo está ligado íntimamente al concepto de energía y ambas magnitudes se miden en la misma unidad, el joule.

Esta relación puede verse en el hecho que, del mismo modo que existen distintas definiciones de energía para la mecánica y la termodinámica, también existen distintas definiciones de trabajo en cada rama de la física. Es una magnitud de gran importancia para establecer nexos entre las distintas ramas de la física.

Trabajo y energía son conceptos que empezaron a utilizarse cuando se abordó el estudio del movimiento de los cuerpos.

Trabajo y energía en Mecánica

Si se realiza un trabajo sobre una partícula, éste se invierte en variar su energía cinética:

$$W_{AB} = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Nótese que una fuerza perpendicular al desplazamiento no hace variar la energía cinética de la partícula. Éste es el caso de la fuerza magnética, que curva la trayectoria pero mantiene constante el módulo de la velocidad.

Por otra parte, si tenemos una fuerza conservativa, el trabajo que realiza es la variación con signo negativo de la energía potencial:

$$W_{AB}\left(F_{cons}\right) = -\Delta U = -\left(U(B) - U(A)\right)$$

Lo cual no es más que una consecuencia del teorema fundamental del cálculo ya que recordamos que una fuerza conservativa y una energía potencial asociada a esta se relacionan por:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}U = -\nabla U$$

Trabajo y energía en Termodinámica

Trabajo de frontera

El trabajo de frontera es aquel que se realiza en un sistema de volumen variable. En un diagrama P-V es el área bajo la curva del comportamiento del sistema.

La formulación matemática es:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} PdV$$

En caso de que el sistema esté a presión constante durante el proceso, el trabajo de frontera queda de la forma:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} PdV = P\int_{V_1}^{V_2} dV = P(V_2 - V_1) = P\Delta V$$

El principio de conservación de la energía relaciona el trabajo realizado en un gas con la energía interna del sistema y el calor transferido de la siguiente forma:

$$\Delta U = Q - W$$

Definición de trabajo en la ciencia física

Trabajo (física), el producto de una fuerza aplicada sobre un cuerpo y del desplazamiento del cuerpo en la dirección de esta fuerza. Mientras se realiza trabajo sobre el cuerpo, se produce una transferencia de energía al mismo, por lo que puede decirse que el trabajo es energía en movimiento. Las unidades de trabajo son las mismas que las de energía. Cuando se levanta un objeto desde el suelo hasta la superficie de una mesa, por ejemplo, se realiza trabajo al tener que vencer la fuerza de la gravedad, dirigida hacia abajo; la energía comunicada al cuerpo por este trabajo aumenta su energía potencial. También se realiza trabajo cuando una fuerza aumenta la velocidad de un cuerpo, como ocurre por ejemplo en la aceleración de un avión por el empuje de sus reactores. La fuerza puede no ser mecánica, como ocurre en el levantamiento de un cuerpo o en la aceleración de un avión de reacción; también puede ser una fuerza electrostática, electrodinámica o de tensión superficial (*véase* Electricidad). Por otra parte, si una fuerza constante no produce movimiento, no se realiza trabajo. Por ejemplo, el sostener un libro con el brazo extendido no implica trabajo alguno sobre el libro, independientemente del esfuerzo necesario.

Trabajo:

También se puede decir que el trabajo es el producto de una fuerza aplicada sobre un cuerpo y el desplazamiento de este cuerpo en dirección de la fuerza aplicada. Mientras se realiza un trabajo sobre el cuerpo, se produce una transformación de energía al mismo, por lo que puede decirse que el trabajo es “energía en movimiento”. Las unidades de trabajo son las mismas que las de energía.

Un ejemplo cotidiano de trabajo sería el levantar una caja desde el piso al borde de una mesa: se realiza una fuerza para vencer el peso de la caja y elevarla a una cierta altura para colocarla sobre la mesa.

Dentro del trabajo nos encontramos es trabajo realizado por una fuerza variable ó el trabajo realizado por una fuerza constante.

Nos referimos a una fuerza constante como aquella que no varía y el trabajo realizado por esta sería definida como el producto de una fuerza paralela al desplazamiento y la magnitud de este desplazamiento. Una forma de decirlo científicamente ó en formula sería: T = Fd * cos□

Donde F es la fuerza aplicada que será constante, y D el desplazamiento de la partícula y □ el ángulo entre las direcciones de la fuerza y el desplazamiento.

F = 30 Nw.

En el caso de una fuerza variable el trabajo se puede calcular gráficamente, el procedimiento es parecido al cálculo del desplazamiento cuando conocemos la velocidad en función del tiempo T. Para calcular el trabajo efectuado por una fuerza variable graficamos Fcos □, que es la componente de la fuerza paralelo al desplazamiento horizontal de la partícula en cualquier punto, en función de una distancia D, dividimos la distancia en pequeños segmentos □D. Para cada segmento se indica el promedio de Fcos □ mediante una línea horizontal de puntos. Entonces el trabajo seria: □T = (Fcos □) * (□D), que sería el área del rectángulo de ancho □D y altura Fcos □, el trabajo total sería la suma de todos los □T. Las unidades básicas de trabajo son el Joule y el Ergio.

Unidades	mks	cgs
Joule (j)	New * m	10-7
Ergío	10-7	Dina * cm

Si tomamos en cuenta que T = F*D y tomando en cuenta la 2da ley de Newton que dice F = M*A se tendrá la formula T = M*A*D

3.2 TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA

Teorema de Trabajo y Energía:

Luego de haber estudiado lo anterior tenemos una idea de la relación que existe entre el trabajo y la energía. Sabemos que el trabajo efectuado sobre un objeto es igual a su cambio de energía cinética.

Esta relación es llamada “El principio de trabajo y energía” que se podría explicar así :

“Cuando la velocidad de un cuerpo pasa de un valor a otro, la variación de la energía cinética que experimenta es igual al trabajo realizado por la fuerza neta que origina el cambio de velocidad”

Si tomamos en cuenta el planteamiento anterior tendremos que Ec = T, pero teniendo en cuenta que este trabajo es realizado por la fuerza neta del cuerpo, es decir por la sumatoria de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

Veamos algunos ejemplos cotidianos de este teorema:

- Cuando un carro acelera aumenta su rapidez y por lo tanto su energía cinética.

En forma detallada ocurre lo siguiente:

La explosión de gasolina por medio del motor y otros componentes originan una fuerza con la misma dirección y sentido del movimiento. Esta fuerza a lo largo de una realiza un trabajo mecánico que transmite a la masa del carro, lo cual ocasiona un aumento en la velocidad y por lo tanto en la energía cinética es igual al trabajo mecánico que por medio de la gasolina se transmitió al carro. En este caso el trabajo es positivo porque la energía cinética aumento.

- Cuando una bola atraviesa una pared, pierde velocidad y por lo tanto energía cinética.

En este caso ocurre lo siguiente:

Para que la bala atraviesa la pared, primero tiene que romper la fuerza de adhesión que tiene las moléculas de la pared, es decir que se origina una fuerza de rozamiento con la dirección del movimiento pero de sentido contrario, que frena la bala disminuyendo su velocidad y por lo tanto su energía cinética.

Esta fuerza a lo largo del espesor de la pared realiza un trabajo mecánico que se transfiere a la masa de la bala lo cual origina una disminución de l la velocidad y por tanto en la energía cinética y esta energía cinética es igual al trabajo realizado que por medio del rozamiento se transmitió a la bala. En este caso el trabajo es negativo porque la energía cinética disminuyo.

3.2.1 CONCEPTO DE ENERGÍA CINÉTICA

La energía cinética es la energía que posee un cuerpo debido a su movimiento. La energía cinética depende de la masa y la velocidad del cuerpo según la siguiente ecuación: Ec = ½ $M*V^2$

Donde m es la masa del cuerpo y V es la velocidad que tiene el cuerpo. Si tenemos la aceleración y la distancia recorrida por el cuerpo sabiendo que A = V/T obtenemos las siguiente formula Ec = M*A*D. Un ejemplo de energía cinética en la vida cotidiana seria el hecho de manejar un auto por una calle o el simple acto de caminar.

Por otra parte dentro de la energía cinética nos encontramos diferentes clases de energía cinética o relaciones entre la energía cinética o relaciones entre la energía cinética con otras clases de energías. Entre estas tenemos la relación entre trabajo y energía, la trasmisión de energía cinética en choques o colisiones y la relación entre energía y la cantidad de movimiento.

Con respecto a la relación entre trabajo y energía es por todos conocido que un cuerpo en movimiento realiza un trabajo y por lo tanto posee una energía, si el movimiento realiza un trabajo y por lo tanto posee una energía, si el movimiento posee una rapidez variable, la energía del cuerpo también varia. Esta clase de energía que depende de la rapidez que posee en cuerpo se llama energía cinética.

Si tomamos en cuenta que t = M*A*D y sabiendo que la energía cinética es Ec = M*A*D y observando esta similitud se obtiene que el trabajo realizado por un cuerpo es igual a la energía cinética que tiene el mismo.

En el caso de la transmisión de energía cinética en colisiones o choques, sabemos que generalmente en una interacción entre dos o más cuerpos, la energía cinética se trasforma en energía potencial, energía calórica o en algún proceso de deformación de los cuerpos que actúan en el proceso. Estas interacciones se caracterizan porque la energía cinética no se conserva se les llama interacciones inelásticas. En este caso la fuerza que se produce cuando los cuerpos se acercan es mayor a la fuerza que se produce cuando se alejan, esto hace que la velocidad que poseen los cuerpos disminuya después de la interacción de los mismos haciendo que la energía cinética disminuya.

En relación con la energía cinética y la cantidad de movimiento si en un sistema aislado formado por dos cuerpos de masas m_1 y m_2, entre los cuales existe una interacción, la cantidad de movimiento se conserva, o sea que $m_1 v + m_2 u = m_1 v_1 + m_2 v_2$; siendo v y u las velocidades respectivas antes de la interacción y v_1 y u_1 las velocidades después de la interacción.

3.2.2 APLICACIONES

3.3 POTENCIA

Es el trabajo, o transferencia de energía, realizado por unidad de tiempo. El trabajo es igual a la fuerza aplicada para mover un objeto multiplicada por la distancia a la que el objeto se desplaza en la dirección de la fuerza. La potencia mide la rapidez con que se realiza ese trabajo. En términos matemáticos, la potencia es igual al trabajo realizado dividido entre el intervalo de tiempo a lo largo del cual se efectúa dicho trabajo.

El concepto de potencia no se aplica exclusivamente a situaciones en las que se desplazan objetos mecánicamente. También resulta útil, por ejemplo, en electricidad. Imaginemos un circuito eléctrico con una resistencia. Hay que realizar una determinada cantidad de trabajo para mover las cargas eléctricas a través de la resistencia. Para moverlas más rápidamente (en otras palabras, para aumentar la corriente que fluye por la resistencia) se necesita más potencia.

La potencia siempre se expresa en unidades de energía divididas entre unidades de tiempo. La unidad de potencia en el Sistema Internacional es el vatio, que equivale a la potencia necesaria para efectuar 1 joule de trabajo por segundo. Una unidad de potencia tradicional es el caballo de vapor (CV), que equivale aproximadamente a 746 vatios.

3.4 FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS

Fuerzas conservativas y no conservativas:

El trabajo efectuado contra la gravedad para mover un objeto de un punto a otro, no depende de la trayectoria que siga; por ejemplo se necesita el mismo trabajo para elevar un cuerpo a una determinada altura, que llevarlo cuestas arriba a la misma altura.

Fuerzas como la gravitatoria, para las cuales el trabajo efectuado no depende de la trayectoria recorrida, sino de la posición inicial y final, a estas fuerzas se les conocen como Fuerzas Conservativas.

Por otra parte la fuerza de fricción no es una fuerza conservativa, ya que el trabajo realizado para empujar una caja por el piso depende si la trayectoria es recta, curva o en zigzag, por ejemplo si una caja es empujada siguiendo una trayectoria semicircular más larga, en vez de hacerlo en trayectoria recta se realiza un trabajo mayor porque es una mayor distancia y a diferencia de la gravedad la fuerza de fricción está en contra de la fuerza que se aplica. Debido a que la energía potencial, la energía asociada con la posición de los cuerpos, esta puede tener sentido solo si se puede establecer para cualquier punto dado, esto no se puede hacer con las fuerzas no conservativas, ya que el trabajo no depende de la distancia entre dos puntos sino de la trayectoria que siga. En consecuencia, la energía potencial se puede definir solo para una fuerza conservativa, así y aunque siempre se asocia la energía potencial con una fuerza, no podemos formularla para cualquier fuerza, como la de fricción que es una fuerza no conservativa.

Otro ejemplo seria una partícula que cae en un fluido está sujeta a la fuerza de gravedad y a la fuerza de fricción y a la viscosidad del elemento.

Ahora podemos ampliar el principio de trabajo y energía, descrita anteriormente para trabajar con energía potencial. Si suponemos que trabajamos con varias fuerzas sobre una misma partícula, algunas de ellas conservativas, podemos formular una función de la energía potencial a estas fuerzas conservativas. Escribimos el trabajo total (neto) T neto como un trabajo realizado por las fuerzas conservativas T C y el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas T NC

T neto = T C + T NC , entonces del principio trabajo y energía tenemos

T neto = ½ m*v2 2- ½ m*v 1 2 = □ Ec.

3.4.1 CONCEPTO DE ENERGÍA POTENCIAL

La energía potencial es la energía almacenada que posee un sistema como resultado de las posiciones relativas de sus componentes.

Al comprimir un resorte o levantar un cuerpo se efectúa un trabajo y por lo tanto se produce energía la cual es potencialmente disponible. En este caso la energía adquirida por el resorte se debe a su configuración, y la energía del cuerpo se debe a su posición. En el primer caso se dice que la energía potencial es elástica y en el segundo que la energía potencial es gravitatoria.

La energía potencial elástica se podría explicar así: si un resorte deformado posee energía potencial, es necesario para deformarlo la realización de un trabajo, que se manifiesta en una transformación de energía muscular en energía cinética y esta a su vez se transforma en energía potencial que adquiere el resorte. Analicemos lo que ocurre al comprimir el resorte: la fuerza que se aplica al resorte es proporcional a la compresión que este experimenta. Tomando en cuenta la definición de proporcionalidad sabemos que se necesita una constante, y tomaremos como constante la deformación del resorte la cual llamaremos *K* y tendremos la siguiente formula *F=K*d*, sustituyendo esta fórmula en la ecuación de trabajo tendremos que *T = ½ (K*d)*d* donde nos queda que *T = ½K*d2*.

Un cuerpo adquiere energía potencial gravitatoria cuando realiza un trabajo contra la gravedad, para colocarlo a cierta altura en relación con el plano horizontal. Para elevar un cuerpo de masa m a una altura h es necesario realizar una fuerza igual a su peso luego siendo g la aceleración de la gravedad; el trabajo seria igual a *T = F*h* siendo la fuerza *F = m*g* el trabajo seria *T = m*g*h*. Si la energía potencial gravitatoria de un cuerpo se mide con referencia a la superficie de la tierra, la ecuación solo es válida para alturas relativamente pequeñas en donde la fuerza de gravedad todavía actué.

3.4.2 APLICACIONES

3.5 TEOREMA DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

El teorema de la conservación de la energía mecánica establece que el trabajo realizado sobre un cuerpo se invierte, exactamente, en aumentar algún tipo de energía.

Cuando en un sistema sólo hay fuerzas conservativas: la energía mecánica permanece constante. La energía cinética se transforma en energía potencial y viceversa. Puedes verlo aquí.

Cuando sobre un cuerpo actúan fuerzas no conservativas, como las de rozamiento, la energía mecánica ya no permanece constante.
La variación de la energía mecánica es precisamente el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas.

E mecánica = W realizado por las fuerzas no conservativas.

3.5.1 DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA

SUBTEMAS 3.5.1. Y 3.5.2. DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE CONSERVACION DE LA ENERGIA MECANICA, Y APLICACIONES DEL TEOREMA.

Con mucha frecuencia, a velocidades relativamente bajas tiene lugar un intercambio entre las energías potencial y cinética. Por ejemplo, supongamos que se levanta una masa m hasta una altura h y, luego se deja caer, como se muestra en la figura siguiente:

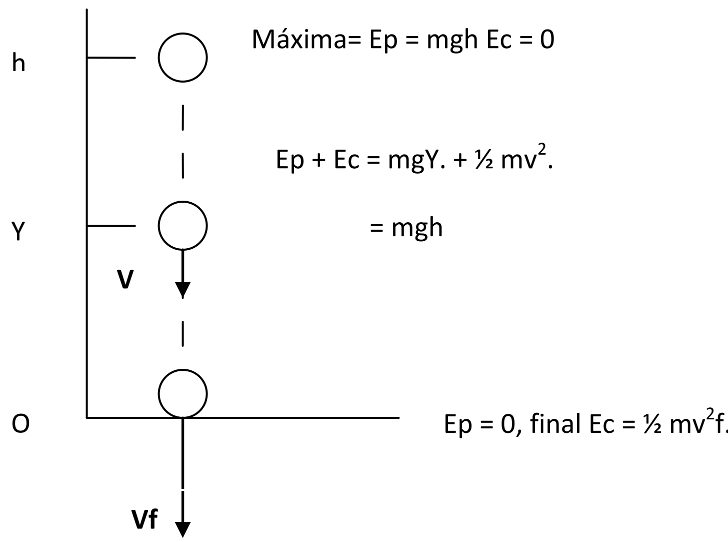


Fig. 3.5.1-1

Una fuerza externa ha incrementado la energía del sistema, dándole una energía potencial, Ep = mgh en el punto más alto. Esta es la energía total disponible para el sistema y no puede modificarse, a menos que se enfrente a una fuerza de resistencia externa. A medida que la masa cae, su energía potencial disminuye debido a que se reduce la altura sobre el piso. La disminución de energía potencial reaparece en forma de energía cinética a causa del movimiento. En ausencia de la resistencia del aire, la energía total permanece igual (Ep + Ec). La energía potencial sigue transformándose en energía cinética hasta que la masa llegue al piso (h = 0). En esta posición final, la energía cinética es igual a la energía total, y la energía potencial es cero. Es importante señalar que la suma de Ep y Ec es la misma en cualquier punto durante la caída.

Energía total = Ep + Ec = constante.

Se dice que la energía mecánica se conserva. En nuestro ejemplo, la energía total en el punto más alto es *mgh* y la energía total a ras de suelo es *½ mv^2*, si se desprecia la resistencia del aire. Ahora podemos enunciar el principio de la *conservación de la energía mecánica*:

Conservación de la energía mecánica: "**En ausencia de resistencia del aire o de otras fuerzas disipativas, la suma de las energías potencial y cinéticas es una constante, siempre que no se añada ninguna otra energía al sistema"**.

Siempre que se aplique este principio resulta conveniente pensar en el inicio y el final del proceso de que se trate. En cualquiera de esos puntos, si la velocidad no es igual a cero, existe una energía cinética, y si la altura no es cero hay una energía potencial. Así pues, podemos escribir:

$$(Ep + Ec)\ \text{inicial} = (Ep + Ec)\ \text{Final}. \quad (1)$$

$$mgh_o + ½\ mv^2{}_o. = mgh_f + ½\ mv^2 f. \quad (2)$$

Los subíndices o y f indican los valores iníciales y finales, respectivamente. La ecuación (2), por supuesto, se aplica cuando no participan fuerzas de fricción.

En el ejemplo donde se plantea el caso de un objeto que cae a partir del reposo desde una posición inicial h_o, la energía total inicial es igual a mgh_o (Vo = 0) y la energía total final es $1/2mv^2f$ (h=0).

$mgh_o = 1/2mv^2f.$ *(3)*

Resolviendo esta ecuación para *vf* obtenemos una ecuación útil para determinar la velocidad final, a partir de las consideraciones generales sobre la energía de un cuerpo que cae desde el reposo sin que lo afecte la fricción.

$$vf = \sqrt{}2gh_o. \ (4).$$

Una gran ventaja de este método es que la velocidad final se determina a partir de los estados de energía inicial y final. La trayectoria real no tiene importancia cuando no hay fricción. por ejemplo, se obtiene la misma velocidad final si el objeto sigue una trayectoria curva partiendo de la misma altura inicial h_o.

3.5.2 APLICACIONES DEL TEOREMA DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

PROBLEMAS DE LA CONSERVACION DE LA ENERGÍA MECANICA.

PROBLEMA 3.5.2.1.- Una masa de 40 kg se impulsa lateralmente hasta que queda 1.6 metros por arriba de su posición más baja. Despreciando la fricción, a) ¿Cuál será su velocidad cuando regrese a su punto más bajo? ¿Cuáles son sus energías potencial y cinética?

Solución: a) La conservación de la energía total requiere que (Ep + Ec) sea la misma al principio y al final. Por lo tanto:

$mgh_o + 0 = 0 + 1/2mv^2f$. De donde se puede eliminar las masas y obtener:

$vf = \sqrt{2gh_o}. = \sqrt{2}\ (9.8\ m/seg^2) \times 1.6\ m =$ **5.60 m/seg**.

Ep = mgh = 40 kg x 9.8 m/seg^2.x 1.6 m = **627 Joules**.

Ec = ½ mv^2. Ec = 0.5 x 40 kg x $(5.60\ m/seg)^2$.= **627 Joules**.

PROBLEMA 3.5.2.2.- Si se arroja una pelota de 0.200 kg verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 27.77 m/seg, ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? Despréciese la fuerza de rozamiento?

Ec = Ep = $1/2mv^2$ = mgh. Despejando h tenemos:

$h = 1/2mv^2./mg = 0.5 \times 0.200\ kg \times (27.77\ m/seg)^2/0.200\ kg \times 9.8\ m/seg^2.$ = **39.34 metros**.

PROBLEMA 3.5.2.3.-Se deja caer una piedra de 500 gr, desde la azotea de una casa de 6 metros de altura. ¿Con qué velocidad llega a la superficie terrestre?. No considere la fuerza de rozamiento.

$vf = \sqrt{2gh_o}. = \sqrt{2 \times 9.8\ m/seg^2 \times 6\ m}$ = **10.84 m/seg**

PROBLEMA 3.5.2.4.- ¿A qué altura se encontrará una piedra de 500 gr que se deja caer, si su energía potencial es de 29.4 Joules y la velocidad con que llega al suelo es de 5.42 m/seg?

Solución: Cuando se suelta la piedra, su energía cinética es cero y la Energía potencial 29.4 joules, así que la energía mecánica total es:

ET = Ec + Ep . ET = 0 + 29.4 J = 29.4 Joules.

Ahora calculamos la energía cinética cuando la piedra lleva una velocidad de 5.42 m/seg :

Ec = ½ mv^2. = 0.5 x 0.5 kg x $(5.42\ m/seg)^2$. = 7.34 Joules.

Como se conserva la energía mecánica total, la energía potencial en ese punto es:

Ep = ET- Ec = 29.4 J – 7.34 J = 22.06 J

Despejando h de la fórmula de Ep:

Ep = mgh. h = Ep/mg = 22.06 N.m/0.5 kg x 9.8 m/seg^2. =

22.06 ~~N~~.m/4.9 ~~N~~ = **4.50 metros**.

PROBLEMA 3.5.2.5.- Una bala de plomo de 10 gramos choca contra un bloque de madera, firmemente sujeto a la pared, con una velocidad de 500 m/seg, penetrando en el bloque a una distancia de 15 cm. ¿Qué cantidad de calor se produce debido a la fuerza de rozamiento que detiene a la bala? ¿Cuál es el valor de la fuerza de rozamiento?

Solución: La energía cinética de la bala, antes del choque, se convierte en calor debido al trabajo realizado por la fuerza de rozamiento. Por lo tanto calcularemos primero la energía cinética:

Ec = ½ mv^2. = 0.5 x 0.010 kg x $(500\ m/seg)^2$. = 1250 Joules.

El calor es igual a la energía cinética; esto es, 1250 Joules que convertidos a calor

nos dan 298.61 calorías mediante la conversión con el equivalente mecánico del calor.

1 cal = 4.186 Joules. 1250 ~~Joules~~ (1 cal/4.186 ~~Joules~~) = **298.61 cal**.

La fuerza de rozamiento la obtenemos de la fórmula del trabajo:

T = Fd. Despejando F = T/d. F = 1250 N.~~m~~/0.15 ~~m~~ = **8333.33 N**.

3.6 OSCILACIONES ARMÓNICAS

El movimiento armónico simple es un movimiento periódico, es decir se repite a intervalos iguales de tiempo. Puede ser descrito en función del movimiento circular uniforme, considerándolo como la proyección sobre cualquier diámetro de un punto que se mueve en una trayectoria circular con velocidad.

Al observar el movimiento armónico que describe el punto A de la figura anterior al moverse de un lado a otro de la línea recta formada por P y Q, podemos apreciar que su velocidad cambia en forma constante: cuando está en el punto central O su velocidad es la máxima, mientras en P y Q la velocidad es momentáneamente nula; después aumenta poco a poco hasta llegar a O donde es máxima para de nuevo disminuir hasta llegar a cero en el otro extremo de la trayectoria.

Es evidente que si la velocidad va cambiando, existe una aceleración. Dicha aceleración siempre se dirige a la posición central de equilibrio y su valor varía de la siguiente forma: cuando se inicia el movimiento en cualquiera de los extremos P o Q hacia el centro o punto O, en los extremos se tiene la mayor aceleración, la cual disminuye a medida que se acerca al centro donde se hace nula; después de pasar el punto central, nuevamente aumenta la aceleración hasta llegar a su valor máximo, cuando llega al otro extremo, en el que la velocidad de hace nula. Por lo tanto en la posición de equilibrio la aceleración es nula y la velocidad tendrá su valor máximo, y en los extremos la aceleración tendrá su valor máximo y la velocidad nula.

En el movimiento armónico simple resultan útiles los siguientes conceptos:

Elongación.- Es la distancia de una partícula a su punto de equilibrio. Puede ser positiva o negativa, según esté hacia la derecha o a la izquierda de la posición de equilibrio.

Amplitud. Es la máxima elongación cuyo valor será igual al radio de la circunferencia.

Para calcular la elongación de una partícula oscilatoria en cualquier instante de tiempo t se usa la expresión: $Y = r \cos 2\pi F t$. obtenida mediante la siguiente deducción:

Al representar a la elongación con la letra Y y al considerar que la elongación de una partícula oscilatoria es igual a la proyección sobre el diámetro horizontal del radio Y equivale al cateto adyacente, por lo cual su valor es:

$Y = r \cos \theta$. (1), como $\theta = \omega t$ (2), $\omega = 2 \pi F$ (3), sustituyendo 2 y 3 en 1:

$Y = r \cos 2 \pi F t$.

Donde: Y = elongación de la partícula en metros.

r = radio de la circunferencia en metros.

F = frecuencia en ciclos/seg

t = tiempo en segundos (seg)

Velocidad de oscilación.- Es el resultado de proyectar la velocidad lineal del movimiento circular de un cuerpo sobre el diámetro de la circunferencia de modo que la expresión matemática de la velocidad de oscilación será:

$v = - vL \operatorname{sen} \theta$ (1), como $\theta = \omega t$ (2), $\omega = 2 \pi F$ (3), $vL = \omega r$ (4), sustituyendo 2, 3 y 4 en 1 queda:

$v = - 2 \pi F r \operatorname{sen} 2 \pi F t$.

donde v = velocidad de oscilación en m/seg.

F = frecuencia en ciclos/seg.

r = radio de la circunferencia en metros (m)

t = tiempo en segundos (seg).

Cuando la velocidad lineal es paralela al diámetro (puntos A y C), la velocidad de oscilación del cuerpo será mayor y tendrá un valor igual a la velocidad lineal. Cuando la velocidad lineal es perpendicular al diámetro (puntos B y D) su proyección sobre el diámetro es nula, por lo tanto su valor es cero.

Aceleración de una partícula oscilante.- En el Movimiento Armónico Simple (MAS), la aceleración de una partícula oscilante tiene un valor igual a la proyección sobre el diámetro de la aceleración radial ar, del movimiento circular uniforme de un cuerpo, por lo que la expresión matemática de la aceleración de una partícula oscilante será:

- $a = - ar \cos \theta$.
- como $ar = \omega^2 r$.
- $\omega = 2 \pi F$
- $\theta = \omega t$
- $\theta = 2 \pi F t$.
- tendremos que :
- $a = - 4 \pi^2 F^2 r \cos 2 \pi F t$.
- puesto $Y = r \cos 2 \pi F t$., la ecuación de la aceleración de una partícula oscilante también se puede expresar como:
- $a = - 4 \pi^2 F^2 Y$.
- donde a = aceleración en m/seg^2.
- F = frecuencia en ciclos/seg.
- Y = elongación en metros (m).

El signo de la aceleración de una partícula oscilante es negativo, porque su sentido es siempre contrario al sentido del movimiento.

Si observamos la ecuación de la aceleración de una partícula oscilante, tenemos que ésta es directamente proporcional a la elongación, pero de sentido contrario. De la ecuación de la aceleración de una partícula oscilante puede despejarse la frecuencia quedando de la siguiente manera:

- $F = \sqrt{- a/4 \pi 2Y} = 1 / 2 \pi \sqrt{- a/Y}$

Energía Mecánica

Cuando un cuerpo se mueve por acción de un resorte, o por acción de una fuerza de gravedad, posee energía cinética por estar en movimiento, y a la vez tiene energía potencial por estar accionado por la fuerza de interacción del sistema. A la suma de estas energías se le llama energía mecánica total.

Entendemos por energía mecánica total de un cuerpo, en un instante dado, a la suma de las energías cinética y potencial que posee dicho cuerpo en ese instante.

A la energía mecánica se le asigna la nomenclatura Em, la formula seria Em = Ec + Ep.

Si solamente hay fuerzas conservativas actuando sobre un sistema, se llega a la conclusión sencilla que concierne a la energía. Cuando no se encuentran fuerzas no conservativas su respectivo trabajo es cero entonces por sustitución en la formula de las fuerzas conservativas tendríamos que:

$½ m*v_2{}^2 - ½ m*v_1{}^2 + Ep_2 - Ep_1 = 0$

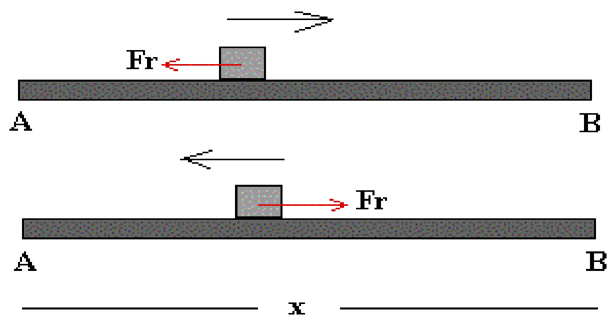
en esta última expresión se puede reordenar para obtener $½ m*v_2{}^2 + Ep_2 = ½ m*v_1{}^2 + Ep_1$, si a Em se le conoce como energía mecánica total le ecuación anterior expresan un principio muy útil para la energía mecánica que se trata de la cantidad de energía conservada, la energía mecánica total permanece constante siempre y cuando no actúen fuerzas conservativas. A este hecho se le conoce como *principio de la conservación de energía*:

Si únicamente se encuentra actuando fuerzas conservativas, la energía mecánica total de un sistema no aumenta ni disminuye en cualquier proceso. Es decir permanece constante (se conserva).

3.7 SISTEMAS QUE INVOLUCRAN FUERZAS NO CONSERVATIVAS

Fuerzas no conservativas

Las fuerzas no conservativas son aquellas que extraen energía mecánica del sistema. Por lo tanto, la energía mecánica total no es constante. En sistemas físicos reales, suelen presentarse fuerzas no conservativas, como la fricción. El trabajo hecho por una fuerza no conservativa ejercida sobre una partícula que se mueve por una trayectoria cerrada es diferente de cero.



$$W_{AB}=-F_r\, x$$

$$W_{BA}=-F_r\, x$$

El trabajo total a lo largo del camino cerrado A-B-A, W_{ABA} es distinto de cero

$$W_{ABA}=-2F_r\, x$$

En situaciones reales, las **fuerzas** no **conservativas** como la fricción actúan sobre partes de un sistema. En tales situaciones, la energía mecánica total del sistema no es constante y no podemos usar la ecuación Eci + Epi = Ecf + Epf. Para tomar en cuenta **fuerzas** de fricción, regresemos al teorema del trabajo y la energía cinética:

- Wnet = ½ mvf^2-1/2mvi^2.

Vamos a separar el trabajo neto en dos partes, el realizado por las **fuerzas** no **conservativas** (Wnc) y el que hacen las **fuerzas conservativas** (Wc). La relación trabajo-energía cinética se convierte entonces en:

- Wnc + Wc = ½ mvf^2-1/2mvi^2.

Despejando Wnc y sustituyendo Wc dada anteriormente (Wc = Epi-Epf) tenemos:

- Wnc = ½ mvf^2-1/2mvi^2 – (Epi-Epf)
- **Wnc = (Ecf + Epf)- (Eci + Epi)**.

El trabajo realizado por todas las fuerzas no conservativas, que actúan sobre partes de un sistema, es igual al cambio en energía mecánica del

sistema. Esto significa que esa energía o cruza la frontera del sistema y entra al resto del universo (de modo que el sistema no está aislado) o esa energía se transforma dentro del sistema en una forma que hasta ahora no se ha considerado.

Un sistema sencillo no aislado podría ser un objeto sobre el cual actúa una fuerza externa neta. Esto se vio anteriormente en el Teorema del trabajo y la energía cinética cuya ecuación es:

- **W net = Ecf - Eci = ΔEc**.

Dicho teorema se enuncia de la siguiente forma: **“Cuando una fuerza neta realiza trabajo sobre un objeto y el único cambio en el objeto es su rapidez, el trabajo realizado es igual al cambio en la energía cinética del objeto”**.

Si el teorema del trabajo y la energía cinética se aplica a un sistema no aislado, nos dice que el trabajo realizado por **fuerzas** externas cambia la energía cinética del sistema. En este caso se transfiere energía del entorno a través de la frontera del sistema. Si se realiza trabajo positivo sobre el sistema, se transfiere energía desde el entorno al sistema; si se realiza trabajo negativo sobre el sistema, se transfiere energía del sistema al entorno.

La fricción es un ejemplo de una fuerza no conservativa que puede transformar energía cinética en energía interna. Si un libro se desliza por una mesa horizontal (de modo que la energía potencial gravitatoria no cambie) y llega a detenerse, la energía cinética ha disminuido, pero las superficies del libro y la mesa están más calientes.

Hasta ahora hemos visto tres métodos de almacenar energía en un sistema: energía cinética, energía potencial y energía interna. Hemos visto sólo una forma de transferir la energía que entra en el sistema, en forma de trabajo en forma de resumen las formas de transferencia de energía que entran o salen de un sistema son las siguientes:

Trabajo.- En el sentido mecánico, es el proceso de transferir energía a un sistema mediante el desplazamiento del sistema a través de una fuerza aplicada.

Calor.- Es el proceso de transferir energía por medio de colisiones microscópicas entre átomos o moléculas. Por ejemplo, una cuchara de metal dentro de una taza de café se calienta porque parte de la energía cinética de las moléculas del café líquido se transfieren a la cuchara como energía interna.

Ondas mecánicas.- Son un medio de transferencia de la energía al permitir que una perturbación se propague por el aire o por otro medio. Este es el método por el cual la energía (que se detecta como sonido) sale de un sistema estéreo por los altavoces y entra a nuestros oídos para estimular el proceso de escucha. Otros ejemplos de ondas mecánicas son las ondas sísmicas y olas oceánicas.

La transmisión eléctrica.- involucra la transferencia de energía por medio de corrientes eléctricas. Esta es la forma en la que entra energía a un equipo estéreo o a cualquier otro aparato eléctrico.

La radiación electromagnética.- son ondas electromagnéticas como la luz, las microondas y las ondas de radio. Ejemplos de este método de transferencia incluyen la preparación de una papa horneada en un horno de microondas y la energía luminosa que se desplaza del Sol a la Tierra por el espacio.

Potencia.- Es el trabajo, o transferencia de energía, realizado por unidad de tiempo. El trabajo es igual a la fuerza aplicada para mover un objeto multiplicada por la distancia a la que el objeto se desplaza en la dirección de la fuerza. La potencia mide la rapidez con que se realiza ese trabajo. En términos matemáticos, la potencia es igual al trabajo realizado dividido entre el intervalo de tiempo a lo largo del cual se efectúa dicho trabajo.

El concepto de potencia no se aplica exclusivamente a situaciones en las que se desplazan objetos mecánicamente. También resulta útil, por ejemplo, en electricidad. Imaginemos un circuito eléctrico con una resistencia. Hay que realizar una determinada cantidad de trabajo para mover las cargas eléctricas a través de la resistencia. Para moverlas mas rápidamente (en otras palabras, para aumentar la corriente que fluye por la resistencia) se necesita mas potencia.

La potencia siempre se expresa en unidades de energía divididas entre unidades de tiempo. La unidad de potencia en el Sistema Internacional es el vatio, que equivale a la potencia necesaria para efectuar 1 joule de trabajo por segundo. Una unidad de potencia tradicional es el caballo de vapor (CV), que equivale aproximadamente a 746 vatios.

Formulas:

P = Trabajo/Tiempo

1W = joule/segundo

1CV = 746 W

en el sistema ingles :

P = pies*libras/segundo

1HP = 550 pies*libras/segundo.

D = 15 cm

Unidad 4

Introducción a la estática de la partícula y del cuerpo rígido

Objetivo Educacional:

Aplicara el concepto de equilibrio de una partícula en la solución de problemas prácticos

4 INTRODUCCIÓN A LA ESTÁTICA DE LA PARTICULA Y DEL CUERPO RÍGIDO

4.1 Fuerzas en el Plano y en el Espacio

Introducción

Muchas veces nos confundimos entre lo que es Estática y lo que es Dinámica, por eso antes de empezar con el estudio del equilibrio de cuerpos es necesario diferenciar entre dichas ramas de la Mecánica. La Estática estudia el equilibrio de los cuerpos, es decir, aquellos cuerpos que se encuentran tanto en reposo como en movimiento con velocidad constante; mientras que la Dinámica estudia los cuerpos acelerados, aunque se puede establecer el equilibrio dinámico mediante la introducción de las fuerzas de inercia.

Para detallar y explicar la parte teórica tomaremos algunos ejemplos de la vida cotidiana en los cuales se aplican principios físicos, como:

Equilibrio en el vuelo de un esquiador

Por qué vuela el avión

¿Por qué no se cae la Torre Pisa?

Fuerzas y principios físicos en la caída de un gato

Equilibrio en el vuelo de un Búmeran

Equilibrio en el baile

Equilibrio de una plataforma sostenida por una columna

Curiosidades de la física.

Finalmente quedará demostrado que la Física no es solamente abstracta, sino que es también práctica y ocurre en la vida diaria, y el estudio del equilibrio es un paso previo para el estudio de la Dinámica y otras ramas de la Física.

Antes de iniciar el estudio del “Equilibrio de Cuerpos”, es importante comprender el significado de ciertos conceptos y principios fundamentales.

Cantidades Básicas: Las cuatro cantidades siguientes se utilizan en el equilibrio:

Longitud: La longitud es necesaria para ubicar un punto en el espacio y de esta forma describir el tamaño de un sistema físico. Una vez que se define una unidad estándar de longitud, puede definirse cuantitativamente distancias y propiedades geométricas de un cuerpo como múltiplos de esa unidad de longitud.

Tiempo: El tiempo se concibe como una sucesión de eventos. Aunque los principios de la Estática son independientes del tiempo, esta cantidad definitivamente juega un papel importante en el estudio de la Dinámica.

Masa: La masa es una propiedad de la materia por la cual podemos comparar la acción de un cuerpo con la de otro. Esta propiedad se manifiesta como una atracción gravitacional entre dos cuerpos y proporciona una medida cuantitativa de la resistencia que presenta la materia al cambio de velocidad.

Fuerza: En general, la fuerza es considerada como un “jalón” o “tirón” ejercido por un cuerpo sobre otro. Esta interacción puede ocurrir cuando existe un contacto directo entre los cuerpos, por ejemplo, una persona empujando sobre una pared. Puede presentarse también a lo largo de una distancia determinada cuando los cuerpos se separan físicamente. Como ejemplos de este último caso están incluidas las fuerzas eléctricas, magnéticas y gravitacionales. En cualquier caso, una fuerza se caracteriza por su magnitud, dirección y punto de aplicación. Idealizaciones: Los modelos o idealizaciones se utilizan en el estudio del equilibrio con la finalidad de simplificar la aplicación de la teoría. Se definirá algunas de las idealizaciones más importantes.

Partícula: Una partícula posee masa pero de tamaño poco significativo. Por ejemplo, el tamaño de la Tierra es insignificante comparado con el tamaño de su órbita, y por lo tanto la Tierra se puede tomar como una partícula cuando se estudia su movimiento orbital en un modelo. Cuando un cuerpo se idealiza como una partícula, los principios de la Mecánica se simplifican de manera importante, debido a que la geometría del cuerpo no se tomará en cuenta en el análisis del problema.

Cuerpo Rígido: Un cuerpo rígido puede ser considerado como un conjunto formado por un gran número de partículas que permanecen separadas entre sí por una distancia fija antes y después de aplicar la carga.

Como resultado, las propiedades del material de que está hecho cualquier cuerpo que se suponga rígido no se tendrá que considerar cuando se analicen las fuerzas que actúan sobre éste. En la mayoría de los casos, las deformaciones reales que se presentan en estructuras, máquinas, mecanismos, etcétera, son relativamente pequeñas, y la suposición de cuerpo rígido es apropiada para efectos de análisis.

Fuerza Concentrada: Una fuerza concentrada representa el efecto de una carga la cual se supone que actúa en algún punto de un cuerpo. Podemos representar este efecto por medio de una fuerza concentrada, siempre y cuando el área sobre la cual se aplica la carga sea relativamente pequeña comparada con el tamaño del cuerpo.

Leyes del Movimiento de Newton: El tema de la mecánica del cuerpo rígido se encuentra basado en las tres leyes del movimiento de Newton, cuya validez se sustenta en la observación experimental. Estas leyes se aplican al movimiento de una partícula, medido desde un marco de referencia no acelerado no acelerado, y pueden definirse brevemente de la forma siguiente:

Primera Ley: Una partícula que se encuentra originalmente en reposo, o moviéndose en línea recta con velocidad constante, permanecerá en este estado siempre y cuando una fuerza desbalanceada no actúe sobre ésta.

Segunda Ley: Una partícula sobre la cual actúa una fuerza desbalanceada F experimenta una aceleración a que posee la misma dirección que la fuerza y una magnitud que es directamente proporcional a la misma. Si F se aplica a una partícula de masa m, esta ley puede expresarse matemáticamente como F = ma

Tercera Ley: Las fuerzas de acción y repulsión entre dos partículas son iguales en intensidad, opuestas en sentido y colineales. Estabilidad y Equilibrio

Un cuerpo en equilibrio estático, si no se le perturba, no sufre aceleración de traslación o de rotación, porque la suma de todas las fuerzas u la suma de todos los momentos que actúan sobre él son cero. Sin embargo, si el cuerpo se desplaza ligeramente, son posibles tres resultados:

(1) el objeto regresa a su posición original, en cuyo caso se dice que está en equilibrio estable;

(2) el objeto se aparta más de su posición, en cuyo caso se dice que está en equilibrio inestable; o bien

(3) el objeto permanece en su nueva posición, en cuyo caso se dice que está en equilibrio neutro o indiferente.

Daremos los ejemplos siguientes: Una pelota colgada libremente de un hilo está en equilibrio estable porque si se desplaza hacia un lado, rápidamente regresará a su posición inicial. Por otro lado, un lápiz parado sobre su punta está en equilibrio inestable; si su centro de gravedad está directamente arriba de su punta la fuerza y el momento netos sobre él serán cero, pero si se desplaza aunque sea un poco, digamos por alguna corriente de aire o una vibración, habrá un momento sobre él y continuaré cayendo en dirección del desplazamiento original.

Por último, un ejemplo de cuerpo en equilibrio indiferente es una esfera que descansa sobre una mesa horizontal; si se desplaza ligeramente hacia un lado permanecerá en su posición nueva.

En la mayor parte de los casos como en el diseño de estructuras y en trabajos con el cuerpo humano, nos interesa mantener equilibrio estable o balance, como decimos a veces. En general un objeto cuyo centro de gravedad esté debajo de su punto de apoyo, como por ejemplo una pelota sujeta de un hilo, estará en equilibrio estable. Si el centro de gravedad está arriba de la base o soporte, tenemos un caso más complicado. Por ejemplo, el bloque que se para sobre su extremo, si se inclina ligeramente regresará a su estado original, pero si se inclina demasiado, caerá. El punto crítico se alcanza cuando el centro de gravedad ya no cae sobre la base de soporte. En general, un cuerpo cuyo centro de gravedad está arriba de su base de soporte estará en equilibrio estable si una línea vertical que pase por su centro de gravedad pasa dentro de su base de soporte. Esto se debe a que la fuerza hacia arriba sobre el objeto, la cual equilibra a la gravedad, sólo se puede ejercer dentro del área de contacto, y entonces, si la fuerza de gravedad actúa más allá de esa área, habrá un momento neto que volteará el objeto. Entonces la estabilidad puede ser relativa. Un ladrillo que yace sobre su cara más amplia es más estable que si yace sobre su extremo, porque se necesitará más esfuerzo para hacerlo voltear. En el caso extremo del lápiz, la base es prácticamente un punto y la menor perturbación lo hará caer. En general, mientras más grande sea la base y más abajo esté el centro de gravedad, será más estable el objeto.

En este sentido, los seres humanos son mucho menos estables que los mamíferos cuadrúpedos, los cuales no sólo tienen mayor base de soporte por sus cuatro patas, sino que tienen un centro de gravedad más bajo. La especie humana tuvo que desarrollar características especiales, como ciertos músculos muy poderosos, para poder manejar el problema de mantenerse parados y al mismo tiempo estable. A causa de su posición vertical, los seres humanos sufren de numerosos achaques, como el dolor de la parte baja de la espalda debido a las grandes fuerzas que intervienen. Cuando camina y efectúa otros tipos de movimientos, una persona desplaza continuamente su cuerpo, de modo que su centro de gravedad esté sobre los pies, aunque en el adulto normal ello no requiera de concentración de pensamiento.

Un movimiento tan sencillo, como el inclinarse, necesita del movimiento de la cadera hacia atrás para que el centro de gravedad permanezca sobre los pies, y este cambio de posición se lleva a cabo sin reparar en él. Para verlo párese usted con sus piernas y espalda apoyadas en una pared y trate de tocar los dedos de sus pies. Las personas que cargan pesos grandes ajustan en forma automática su postura para que el centro de gravedad de la masa total caiga sobre sus pies.

Principios de Equilibrio

Condiciones Generales de Equilibrio

La suma algebraica de las componentes (rectangulares) de todas las fuerzas según cualquier línea es igual a cero.

La suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas respecto cualquier línea (cualquier punto para fuerzas coplanares) es igual a cero.

Se aplicarán en seguida estas condiciones generales de equilibrio en las varias clases de sistemas de fuerzas, a fin de deducir las condiciones suficientes para obtener resultante nula en cada caso.

Fuerzas Colineales

Hay solo una condición de equilibrio que puede expresarse (1)$\sum F = 0$ o (2) $\sum M8 = 0$. La (1) establece que la suma algebraica de las fuerzas es cero, y la (2) que la suma algebraica de los momentos respecto cualquier punto (no en la línea de acción) es cero. La condición gráfica de equilibrio es que el polígono de fuerzas queda cerrado.

Fuerzas Coplanares Concurrentes

Tienen dos condiciones independientes algebraicas de equilibrio. Pueden expresarse en tres formas:

(1) $\sum Fx = \sum Fy = 0$ (2) $\sum Fx = \sum Ma = 0$ (1)$\sum Ma = \sum Mb = 0$

La forma (1) expresa que la suma algebraica de los componentes según los ejes x, y (en el plano de las fuerzas) es cero; la (2) que la suma algebraica de las componentes según cualquier eje y la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas respecto a un punto es cero (el punto debe estar en el plano de las fuerzas y la línea que lo une en la intersección de las fuerzas, debe ser inclinado al eje tomado); la (3) se explica, asimismo, refiriéndose a momentos respecto dos puntos no colineales con la intersección aludida. En cualquiera de los casos anteriores la resultante es cero por lo siguiente:

1º Si existe resultante del sistema, es una sola fuerza:

y si por tanto $\sum Fx = 0$ y $\sum Fy = 0$, también $R = 0$.

2º Si $\sum Fx = 0$, si hay resultante debe ser perpendicular al eje X, y si $\sum Ma = 0$, entonces el momento de R respecto al punto es cero, lo que exige que $R = 0$.

3º Si hay resultante, debe pasar por el punto de intersección, pero si $\sum Ma = 0$, entonces R pasa por él también, y si $\sum Mb = 0$, R debe ser cero, no estando b sobre c.

La condición gráfica de equilibrio es que el polígono de fuerzas quede cerrado, pues entonces no hay resultante.

Fuerzas Coplanares, No Concurrentes y Paralelas

Hay dos condiciones algebraicas independientes de equilibrio.

(1) $\sum F = \sum M = 0$ ó (2) $\sum Ma = \sum Mb = 0$

Se enuncian similarmente al caso anterior. Ambas condiciones son suficientes para hacer la resultante igual a cero. En efecto, si hay resultante será una fuerza o un par. Si (1) $\sum F = 0$, la resultante no es una fuerza, y si $\sum Ma = 0$, no es un par; por lo tanto, no hay resultante. (2) S$\sum Ma = 0$, la resultante no es un par sino una fuerza que pasa por a; y si también $\sum Mb = 0$, el momento de la resultante respecto a b debe ser cero, lo que implica que la fuerza es cero.

Gráficamente, hay dos condiciones de equilibrio; el polígono de fuerzas y el funicular deben cerrar porque en el primer caso si hay resultante será un par, pero con la condición segunda no existirá el par.

Fuerzas Coplanares, No Concurrentes y No Paralelas.

Hay tres condiciones independientes algebraicas de equilibrio:

(1) $\sum Fx = \sum Fy = \sum Ma = 0$

(2) $\sum Fx = \sum Ma = \sum Mb = 0$

(3) $\sum Ma = \sum Mb = \sum Mc = 0$

Y se ha explicado, lo que significan las expresiones anteriores. Hay que advertir que los ejes x, y, de las componentes y los orígenes de momentos deben estar en el plano de las fuerzas, y los tres puntos a, b, c, no deben ser colineales. Estas tres condiciones bastan para dar resultante igual a cero. En efecto, si existe resultante será una fuerza o un par. Si en (1)$\sum Fx = \sum Fy = 0$, la resultante no es fuerza, pero si$\sum M = 0$, no es un par y no habrá resultante. En (2), si $\sum Fx = 0$, la resultante es perpendicular al eje o un par; si $\sum Ma = 0$, no es un par sino una fuerza que pasa por a y perpendicular al eje; si además, $\sum Mb = 0$, el momento de esa fuerza respecto a b es cero, y por tanto, la fuerza es cero. En (3), si $\sum Ma = 0$, la resultante no es un par sino una fuerza que pasa por a; si además,$\sum Mb = 0$, la resultante pasa por b, pero si $\sum Mc = 0$, esta resultante será cero.

Fuerzas No Coplanares Concurrentes

Hay tres condiciones independientes algebraicas de equilibrio. Se expresan:

$\sum Fx = Fy = \sum Fz = 0$

es decir, la suma algebraica de las componentes según tres ejes rectangulares x, y, z, es cero, pues si existe resultante será igual a:

Fuerzas No Coplanares Paralelas

Hay tres condiciones independientes que se expresan en dos formas:

(1) $\sum F = \sum M1 = \sum M2 = 0$ y (2) $\sum M1 = \sum M2 = \sum M3 = 0$

La forma (1) expresa que la suma algebraica de las fuerzas, y la de los momentos respecto dos ejes perpendiculares a las fuerzas pero no paralelas entre sí, es igual a cero; y la (2), que la suma algebraica de los momentos respecto tres ejes no concurrentes, no paralelos y perpendiculares a las fuerzas, es cero. En efecto, en (1), si$\sum F = 0$, la resultante no es una fuerza, si además $\sum M1 = 0$, la resultante es un par cuyo plano es paralelo al primer eje de momento y a las fuerzas; y si$\sum M2=0$, ese plano será también paralelo al segundo eje; pero estas condiciones de paralelismo no pueden realizarse sino cuando las fuerzas del par son colineales, en cuyo caso se balancean, y no hay resultante. En (2), si $\sum M1=\sum M2 = 0$, la resultante será una fuerza que pasa por la intersección de los ejes 1 y 2; si además $\sum M3 = 0$, esa fuerza será cero, y no existirá resultante.

Fuerzas No Coplanares, No Concurrentes y No Paralelas

Hay seis condiciones algebraicas independientes de equilibrio:

$$\sum Fx = \sum Fy = \sum Fz = \sum Mx = \sum My = \sum Mz = 0$$

Es decir, la suma algebraica de las componentes de todas las fuerzas según tres líneas, y la de los momentos con respecto a tres ejes no coplanares es cero. Por lo general, es conveniente tomar las tres líneas y los ejes perpendiculares entre sí. En efecto, si hay resultante, será una línea o un par, si las componentes según las líneas son cero, la fuerza será cero, y si los momentos son cero, el par no existe y no hay resultante.

Condiciones Especiales de Equilibrio

Ciertas condiciones especiales de equilibrio dependientes del número de fuerzas en el sistema, son de gran uso. Son las siguientes:

Una fuerza simple no puede estar en equilibrio.

Si dos fuerzas están en equilibrio son necesariamente colineales, iguales y opuestas.

Si tres fuerzas están en equilibrio, deben ser coplanares y concurrentes o paralelas. En efecto, si las fuerzas con F´, F´´, F´´´, desde que F´ y F´´ balancea a F´´´, tendrán una resultante colineal con ésta, y en tal caso están en el mismo plano que F´´´.

Si F´y F´´ son concurrentes su resultante es concurrente con ellas y también F´´´; si son paralelas, entonces R, y por tanto F´´´, es paralela a ellas.

Cuando las tres fuerzas son concurrentes, cada una de ellas es proporcional al seno del ángulo de los otros dos (Teorema de Laml). Por lo tanto:

Donde a, b, c, son los ángulos aludidos. Estas ecuaciones de deducen aplicando el principio de los senos al triángulo de las fuerzas. Cuando las tres fuerzas son paralelas, las dos exteriores tienen la misma dirección, y la central es opuesta los momentos de dos de cualquiera de esas fuerzas respecto un punto sobre la tercera, son iguales en magnitud y opuestas en signo.

Si cuatro fuerzas coplanares están en equilibrio, la resultante de dos de ellas balancea las otras dos. Por tanto: a) si las dos primeras son concurrentes y las otras también, la resultante pasa por los dos puntos de concurrencia; b) si dos son concurrentes y las otras paralelas, la resultante de las primeras actúa por el punto de concurrencia y es paralela a las otras; c) si las cuatro fuerzas son paralelas, la resultante también les es paralela. Los principios (a) y (b) se usan en el análisis gráfico de los sistemas de cuatro fuerzas.

Fuerzas Externas e Internas

La palabra “cuerpo” se usa en Mecánica en forma amplia para denominar cualquier porción definida de materia, simple o rígida, como una piedra, tablón, etc., o compleja como un puente, máquina, etc., o fluida como el agua en un depósito, etc. De tal modo, cualquier parte de uno de esos elementos puede llamarse “cuerpo”, si esa parte tiene especial interés para tomarse por separado.

Conviene distinguir entre fuerzas externas e internas con referencia a un cuerpo determinado. Es externa a un cuerpo si ejerce sobre él por otro cuerpo; es interna si se ejerce en parte del cuerpo por otra parte del mismo cuerpo.

Con referencia a un cuerpo, todas las fuerzas externas tomadas en conjunto se llaman el sistema externo, y las interiores en conjunto el sistema interno. Cuando un cuerpo está inmóvil, todas las fuerzas externas e internas que actúan sobre el, constituyen un sistema de equilibrio. El sistema interno está constituido por fuerzas que mutuamente se balancean y por tanto, el sistema externo también se halla balanceado. Puede, en consecuencia, decirse que el sistema externo de las fuerzas que actúan en un cuerpo inmóvil está en equilibrio.

Diagrama de Cuerpo Libre

Los párrafos siguientes se refieren a aplicaciones de las condiciones de equilibrio. Estas condiciones deben aplicarse, por cierto, a un sistema equilibrado, y su uso exige la consideración previa de un sistema que comprende las fuerzas por estudiar. Esto se hace considerando el cuerpo inmóvil dado por sí solo, con las fuerzas que actúan sobre él. Se centra así el diagrama del cuerpo libre, que es un dibujo mostrando: 1) el cuerpo solo, asilado de otros cuerpos, y 2) todas las fuerzas externas que se ejercen sobre dicho cuerpo. En ese diagrama no aparecerán las fuerzas ejercidas por el cuerpo, sino las que se ejercen sobre él, y tampoco incluirá fuerzas interiores. Se ha dicho que las fuerzas externas son en general las debidas a la atracción de la Tierra, o las ocasionadas por contacto. Esas fuerzas son por tanto usualmente la de gravitación, más el número de contacto entre el cuerpo dado y otros cuerpos. Se dan enseguida ejemplos sobre la representación del diagrama del cuerpo libre.

Torque de una Fuerza

Cuando se aplica una fuerza en algún punto de un cuerpo rígido, el cuerpo tiende a realizar un movimiento de rotación en torno a algún eje. La propiedad de la fuerza para hacer girar al cuerpo se mide con una magnitud física que llamamos torque o momento de la fuerza. Se prefiere usar la palabra torque y no momento, porque esta última se emplea para referirnos al momento lineal, momento angular o momento de inercia, que son todas magnitudes físicas diferentes para las cuales se usa una misma palabra.

Analizaremos cualitativamente el efecto de rotación que una fuerza puede producir sobre un cuerpo rígido. Consideremos como cuerpo rígido a una regla fija en un punto O ubicado en un extremo de la regla, sobre el cual pueda tener una rotación, y describamos el efecto que alguna fuerza de la misma magnitud actuando en distintos puntos, produce sobre la regla fija en O, como se muestra en la figura (a).Una fuerza F1 aplicada en el punto a produce una rotación en sentido anti horario, F2 en b produce una rotación horaria y con mayor rapidez de rotación que en a, F3 en b pero en dirección de la línea de acción que pasa por O no produce rotación, F4 inclinada en b produce rotación horaria con menor rapidez de rotación que F2; F5 y F6 aplicadas perpendicularmente a la regla no producen rotación. Por lo tanto existe una cantidad que produce la rotación del cuerpo rígido relacionada con la fuerza, que definimos como el torque de la fuerza.

Para ver el gráfico seleccione la opción ¨Bajar trabajo¨ del menú superior
Se define el torque T de una fuerza F que actúa sobre algún punto del cuerpo rígido, en una posición r respecto de cualquier origen O, por el que puede pasar un eje sobre el cual se produce la rotación del cuerpo rígido, al producto vectorial entre la posición r y la fuerza aplicada F.

$T = r \times F$

El torque es una magnitud vectorial, si q es el ángulo entre r y F, su valor numérico por definición del producto vectorial, es:

Para ver la fórmula seleccione la opción ¨Bajar trabajo¨ del menú superior

Su dirección es siempre perpendicular al plano de los vectores r y F, cuyo diagrama vectorial se muestra en la figura que sigue; su sentido está dado por la regla del producto vectorial o la regla de la mano derecha. En la regla de la mano derecha los cuatro dedos de la mano derecha apuntan a lo largo de r y luego se giran hacia F a través del ángulo q , la dirección del pulgar derecho estirado es la dirección del torque y en general de cualquier producto vectorial.

Para ver el gráfico seleccione la opción ¨Bajar trabajo¨ del menú superior

Por convención se considera el torque positivo o negativo si la rotación que produce la fuerza es en sentido antihorario u horario respectivamente.

El torque de una fuerza depende de la magnitud y dirección de F y de su punto de aplicación respecto de un origen O. Si la fuerza F pasa por O, r = 0 y el torque es cero. Si q = 0 o 180º, es decir, F está sobre la línea de acción de r, F senq = 0 y el torque es cero. F senq es la componente de F perpendicular a r, sólo esta componente realiza torque, y se le puede llamar $F^{\perp}$. En la siguiente figura se ve que $r^{\perp}$ = r senq es la distancia perpendicular desde el eje de rotación a la línea de acción de la fuerza, a $r^{\perp}$ se le llama brazo de palanca de F. Entonces, la magnitud del torque se puede escribir como:

$T = r (F \text{ sen}q) = F (r \text{ sen}q) = rF^{\perp} = r^{\perp}F$

Rotación positiva

Para ver el gráfico seleccione la opción ¨Bajar trabajo¨ del menú superior

Equilibrio de los Cuerpos

Definición matemática: El centro de gravedad de un cuerpo es el punto de aplicación de la resultante de todas las acciones de gravedad sobre las moléculas del cuerpo.

El punto G de aplicación de la resultante g se llama baricentro del cuerpo dado.

Ejemplo: Supongamos un cuerpo constituido por 10 moléculas iguales. Sus fuerzas gravíticas particulares son 1, 2, 3,…, 9, 10. La fuerza gravítica general es g, resultante del sistema 1, 2, 3,…, 9, 10.

Equilibrio.- El equilibrio es el estado de reposo de un cuerpo. Un cuerpo está en equilibrio cuando en su centro de gravedad está aplicada una fuerza igual y opuesta a su peso.

Un cuerpo puede estar en equilibrio de dos modos: 1°, si está suspendido 2°, si descansa en una base.

Condición de equilibrio de un cuerpo suspendido, móvil alrededor de un punto fijo.- Para que un cuerpo móvil alrededor de un punto fijo esté en equilibrio, es menester que la vertical que pasa por el centro de gravedad pase también por el punto de suspensión. Con esta condición, el equilibrio puede ser: estable, inestable o indiferente.

El equilibrio es estable si el cuerpo, siendo apartado de su posición de equilibrio, vuelve al puesto que antes tenía, por efecto de la gravedad. En este caso el centro de gravedad está debajo del punto de suspensión.

Ejemplo: El péndulo, la plomada, una campana colgada.

El equilibrio es inestable si el cuerpo, siendo apartado de su posición de equilibrio, se aleja por efecto de la gravedad. En este caso el centro de gravedad está más arriba del punto o eje de suspensión.

Ejemplo: Un bastón sobre su punta.

El equilibrio es indiferente si el cuerpo siendo movido, queda en equilibrio en cualquier posición. En este caso el centro de gravedad coincide con el punto de suspensión.

Ejemplo: Una rueda en su eje.

Para ver el gráfico seleccione la opción ¨Bajar trabajo¨ del menú superior

Equilibrio Estable Equilibrio inestable Equilibrio Indiferente

Cuando el cuerpo se aleja de su posición de equilibrio, el peso P puede descomponerse en dos fuerzas rectangulares; una anulada por la resistencia de uno de los ejes, y la otra imprime al cuerpo un movimiento de rotación, que lo lleva a la posición de equilibrio estable o lo aleja de ella.

Condición de equilibrio de un cuerpo que descansa sobre un plano.- Para que un cuerpo que descansa sobre un plano esté en equilibrio es preciso que la vertical del centro de gravedad pase por el interior de la base de sustentación. Se llama base de sustentación la superficie de apoyo del cuerpo o también el polígono que se forma al unir los diversos puntos de apoyo, cuando son varios (una silla, por ejemplo).

Un cuerpo colocado en un plano horizontal, puede presentar, como el caso precedente, tres clases de equilibrio:

1° El equilibrio será estable, si el centro de gravedad está más bajo que cualquiera otra posición. Ejemplo: Una pirámide que descansa sobre su base.

2° El equilibrio será inestable, si el centro de gravedad se halla más alto que cualquiera otra posición. Ejemplo: una pirámide regular cuyo vértice descansa sobre su plano.

3° Se hallará en Equilibrio indiferente, si su centro de gravedad no sube ni baja las posiciones que pueda tomar. Ejemplo: una esfera perfecta y homogénea.

Inercia y Momento de Inercia

Principio de Inercia

Todos sabemos que cuando un autobus frena, los pasajeros son impulsados hacia delante, como si sus cuerpos trataran de seguir; a veces, en algunos choques, hasta hay personas que son despedidas fuera de los vehículos. Este es uno de los ejemplos que demuestra que “los cuerpos que los cuerpos que están en movimiento tienden a seguir en movimiento”. Esta propiedad de la materia se llama inercia. Pero hay otros aspectos de la inercia. Cuando un autobus arranca, por ejemplo, los pasajeros son impelidos hacia atrás, como si trataran de quedar en el reposo en el que se hallaban. Podríamos decir entonces que “los cuerpos que están en reposo tienden a seguir en reposo”. Pero hay más todavía. Si el conductor de un automóvil acelera o aminora la marcha, esas modificaciones repercuten inmediatamente en el cuerpo de los pasajeros, quienes se inclinan hacia atrás o hacia adelante respectivamente, de esto se deduce que “los cuerpos en movimiento tienden a mantener su velocidad”; pero como la velocidad es un vector, esto significa que “se mantiene no sólo la medida, sino también la dirección y el sentido de la velocidad”. Esto se puede ver cuando un vehículo entra en una curva, entonces los pasajeros son empujados hacia fuera, pues sus cuerpos tienden a seguir en la dirección que traían; incluso el auto mismo se inclina, y si se toma la curva a excesiva velocidad, se produce el vuelco, lo que muestra la tendencia del auto a seguir en línea recta.

Podríamos resumir todo lo anterior en dos conclusiones:

Todos los en reposo tienden a seguir en reposo.

Todos los cuerpos en movimiento tienden a seguir moviéndose, pero con movimiento rectilíneo y uniforme.

Principio de Inercia

Fue descubierto por Leonardo de Vinci, quien lo mantuvo en secreto; más tarde fue estudiado por Galileo y finalmente Newton le dio la forma con que hoy lo conocemos: “Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza, o actúan varias que se anulan entre sí, entonces el cuerpo está en reposo o bien en movimiento rectilíneo y uniforme”.

Momento de Inercia

El torque es el análogo rotacional de la fuerza en el movimiento lineal, y un torque neto produce un movimiento rotacional. Para analizar esta relación, consideremos una fuerza constante que actúa sobre una partícula de masa m. La magnitud del torque sobre la partícula es:

t = rF = rma = mr2a

en donde a = ra es la aceleración tangencial. Para un sistema de partículas fijas (un cuerpo rígido) en rotación alrededor de un eje fijo, esta ecuación se puede aplicar tanto a cada partícula como a los resultados sobre todo el cuerpo, con el fin de encontrar el torque total. Todas las partículas de un cuerpo en rotación tienen la misma aceleración angular.

t = t1 + t2 +… +tn

t = m1r12a + m2r22a +… +mnrn2a

t = (m1r12 + m2r22 +… +mnrn2)a

Pero para un cuerpo rígido, las masas y las distancias del eje de rotación son constantes. Por consiguiente, la cantidad entre paréntesis es constante y se llama momento de inercia.

La magnitud del torque es, entonces:

t = Ia

Esta es la forma rotacional de la segunda ley de Newton. Hay que recordar que las fuerzas y los torques netos son necesarios para producir movimientos, aunque no se indique explícitamente.

En conclusión diremos que el momento de inercia I es una medida de la inercia rotacional o la tendencia de un cuerpo a resistirse al cambio en su movimiento rotacional. Aunque se dice que I debe ser constante para un cuerpo rígido, y que es el análogo rotacional de la inercia, corresponde a un eje determinado y puede tener valores diferentes para ejes diferentes. El momento de inercia depende también de la distribución de la masa referente al eje de rotación.

Conceptos Fundamentales para el Equilibrio de Cuerpos

Centro de Gravedad

Debido a que un cuerpo es una distribución continua de masa, en cada una de sus partes actúa la fuerza de gravedad. El centro de gravedad o centroide es la posición donde se puede considerar actuando la fuerza de gravedad neta, es el punto ubicado en la posición promedio donde se concentra el peso total del cuerpo. Para un objeto simétrico homogéneo, el centro de gravedad se encuentra en el centro geométrico, pero no para un objeto irregular.

Por ejemplo, si consideramos dos puntos materiales A y B, cuyas masas respectivas valgan m1 y m2; además los suponemos rígidamente unidos por una varilla de masa despreciable, a fin de poder considerarlos como formando parte de un cuerpo sólido.

La gravedad ejerce sobre dichos puntos sendas fuerzas paralelas m1g y m2g que admiten una resultante cuyo punto d aplicación recibe el nombre de centro de gravedad o centroide.

En otras palabras, el centro de gravedad de un cuerpo es el punto de aplicación de la resultante de todas las fuerzas que la gravedad ejerce sobre los diferentes puntos materiales que constituyen el cuerpo.

Un objeto está en equilibrio estable mientras su centro de gravedad quede arriba y dentro de su base original de apoyo.

Cuando éste es el caso, siempre habrá un torque de restauración. No obstante, cuando el centro de gravedad cae fuera del centro de apoyo, el torque de restauración pasa sobre el cuerpo, debido a un torque gravitacional que lo hace rotar fuera de su posición de equilibrio.

Los cuerpos rígidos con bases amplias y centros de gravedad bajos son, por consiguiente, más estables y menos propensos a voltearse. Esta relación es evidente en el diseño de los automóviles de carrera de alta velocidad, que tienen neumáticos anchos y centros de gravedad cercanos al suelo. También la posición del centro de gravedad del cuerpo humano tiene efectos sobre ciertas capacidades físicas. Por ejemplo, las mujeres suelen doblarse y tocar los dedos de sus pies o el suelo con las palmas de sus manos, con más facilidad que los varones, quienes con frecuencia se caen al tratar de hacerlo; en general, Los varones tienen centros de gravedad más altos (hombros más anchos) que las mujeres (pelvis grande), de modo que es más fácil que el centro de gravedad de un varón quede fuera de su base de apoyo cuando se flexiona hacia el frente.

Movimiento del Centro de Gravedad

El movimiento que ejecuta cualquiera de los puntos de un sistema material puede ser muy complicado, pues resulta de componer el debido a la fuerza exterior aplicada al mismo con el que producen las fuerzas interiores que dimanan de los puntos restantes del sistema. Sin embargo, puede demostrarse que siempre, cualesquiera que sean las fuerzas interiores, el centro de gravedad del sistema se mueve como si en él estuviera concentrada toda la masa y sobre y sobre él actuasen todas las fuerzas exteriores.

Centro de Masa

Es la posición geométrica de un cuerpo rígido en la cual se puede considerar concentrada toda su masa; corresponde a la posición promedio de todas las partículas de masa que forman el cuerpo rígido. El centro de masa de cualquier objeto simétrico homogéneo, se ubica sobre un eje de simetría.

En forma más sencilla podemos decir que el centro de masa es el punto en el cual se puede considerar concentrada toda la masa de un objeto o un sistema.

Cuando se estudia el movimiento de un cuerpo rígido se puede considerar la fuerza neta aplicada en el centro de masa y analizar el movimiento de este último como si fuera una partícula. Cuando la fuerza es el peso, entonces se considera aplicado en el centro de gravedad. Para casi todos los cuerpos cerca de la superficie terrestre, el centro de masa es equivalente al centro de gravedad, ya que la gravedad es casi constante, es decir, si la gravedad es constante en toda la masa, el centro de gravedad coincide con el centro de masa.

Si el objeto está en rotación, el centro de masa se mueve como si fuera una partícula. Algunas veces el centro de masa se describe como si estuviera en el punto de equilibrio de un objeto sólido. Por ejemplo, si usted equilibra un metro sobre su dedo, el centro de masa de la varilla de madera está localizado directamente sobre su dedo y toda la masa parece estar concentrada allí.

La segunda ley de Newton se aplica a un sistema cuando se usa el centro de masa

F = MACM

en donde F es la fuerza externa neta, M es la masa total del sistema o la suma de las masas de las partículas del sistema, y ACM es la aceleración del centro de masa. La ecuación dice que el centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si toda la masa del sistema estuviera concentrada allí, y recibiera la acción de la resultante de todas las fuerzas externas.

Asimismo, si la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema de partículas es cero, la cantidad de movimiento lineal total del centro de masa se conserva (permanece constante) dado que F = MD VCM / D t como para una partícula. Esto significa que el centro de masa se mueve con una velocidad constante o permanece en reposo. Aunque se pueda visualizar con más facilidad el centro de masa de un objeto sólido, el concepto del centro de masa se aplica a cualquier sistema de partículas u objetos, aunque esté en estado gaseoso.

Para un sistema de n partículas dispuestas en una dimensión, a lo largo del eje x, la posición del centro de masa está dado por:

Esto es, XCM es la coordenada de x del centro de masa de un sistema de partículas. En una notación corta:

En donde S i indica la suma de los productos mixi para i partículas (i=1,2,3,…,n).

Si S imixi = 0, entonces XCM = 0, y el centro de masa del sistema unidimensional está localizado en el origen.

Otras coordenadas del centro de masas para el sistema de partículas se definen en forma similar. Para una distribución bidimensional de masas, las coordenadas del centro de masa son: (XCM, YCM).

Fuerza Centrípeta

Es la resultante de todas las fuerzas aplicadas a un cuerpo hacia el centro de la trayectoria curva y es la que produce el movimiento circular. La magnitud mv2/r no es una fuerza sino que representa el producto de la masa m por la magnitud de la aceleración centrípeta v2/r. Esta aceleración está dirigida hacia el centro, lo que indica que la resultante de todas las fuerzas aplicadas al cuerpo que gira uniformemente a lo largo de una circunferencia está dirigida hacia el centro. Así pues, existen la aceleración centrípeta (o aceleración normal) y las fuerzas cuya suma vectorial le comunica al cuerpo esta aceleración centrípeta.

Fuerzas de Coriolis y Fuerzas Inerciales

En un marco de referencia que gire a velocidad angular constante w en relación con un marco de referencia inercial, existe una pseodofuerza llamada fuerza de Coriolis. Esta parece actuar en un cuerpo, en un marco de referencia en rotación, sólo si el cuerpo se mueve en relación con ese marco de referencia, y trata de desviar al cuerpo hacia un lado; también es un efecto de que el marco de referencia sea no inercial, y por lo tanto se llama fuerza inercial.

Impulso y Cantidad de Movimiento

Se llama impulso I aplicado por una fuerza F durante un lapso D t, al producto de la fuerza por el lapso en que estuvo aplicada.

I = FD t

Se llama cantidad de movimiento p de una masa m, al producto de su masa por su velocidad.

p = mv

Si un cuerpo experimenta un cambio en su velocidad D v, entonces su cantidad de movimiento experimenta un cambio D p. D p = mD v

Con estas definiciones podemos expresar los resultados anteriores diciendo que “el impulso aplicado por una fuerza es igual a la variación de la cantidad de movimiento que entonces experimenta el cuerpo”.

Por acción y reacción:

F21 = -F12

m1a1 = -m2a2

Si la interacción dura D t y durante ese tiempo las fuerzas han sido constantes, entonces:

F 21 D? t = -F 12 D? t

m1a1D t = -m2a2D t

m1D v1 = -m2D v2

Para cada masa se puede decir que:

FD t = mD v

I = D p

Ejemplos de Aplicación

Vuelo y Sustentación de un Esquiador

Desde que se lanza hasta que se detiene, un saltador de esquís saca partido unas veces de la gravedad y otras de la fuerza centrífuga o del rozamiento del aire.

El salto de trampolín empieza con una fase de impulso durante la cual se reduce la resistencia del aire con la “postura del huevo”. Aplastado por la fuerza centrífuga en la porción curva del trampolín, el saltador contrae los músculos. En el segmento recto final, sólo tiene un cuarto de segundo para enderezarse y proyectarse hacia arriba. En el vuelo, su postura optimiza la sustentación y rebaja la resistencia del aire.

Durante el planeo, el saltador adopta la postura que le permite volar lo más lejos posible. En el aire, saca partido de fuerzas que en el trampolín no hacían más que frenarlo. Le interesa minimizar la resistencia del aire (disminuir la superficie proyectada hacia delante), que tiende a rebajar su velocidad de vuelo, y aumentar la sustentación (aumentar la superficie proyectada hacia abajo), la fuerza que explica porqué los aviones se mantienen en el aire. Por ello, casi se acuesta sobre los esquís con los brazos pegados al cuerpo, a la vez que mantiene un ángulo constante de 20 grados entre los esquís y la velocidad. Esta postura viene dictada por la experiencia, pero las simulaciones por ordenador y los ensayos en túnel aerodinámico confirman su eficacia. Asombra más que el esquiador mejore la sustentación disponiendo los esquís en V. Esta postura inventada a fines de los años ochenta por el sueco Jan Bokloev, les pareció en un principio chocante a los puristas, habituados a los esquís paralelos. La mejora en los resultados fue tan evidente que, desde 1992, la alta competición sólo conoce especialistas en la postura de Bokloev. Cuando un esquiador logra la postura óptima, la sustentación llega a los 300 néwtones (30 kilogramos) durante el vuelo. ¡Y se duda de que un efecto de tal amplitud influya en las marcas!

Sin embargo, para que la competición mantenga su interés, es esencial que la fuerza de sustentación proceda de las aptitudes del esquiador y no de la forma o de la naturaleza de su equipo. Por ello, las normas internacionales del salto con esquís limitan estrictamente las medidas, los materiales y la confección de los trajes de los esquiadores. Para evitar que el esquiador se transforme en un ala volante, su indumentaria debe ceñirse al cuerpo; no debe superar en más de ocho centímetros el tórax. El tejido no puede favorecer la sustentación. No debe estar ni plastificado ni revestido de caucho; ha de dejar que penetre el aire.

Por Qué Vuela un Avión

Fuerzas y momentos que actúan sobre la Aeronave.

Un avión es un cuerpo tridimensional que se mueve en el espacio alrededor de sus 3 ejes que son:

Para ver el gráfico seleccione la opción ¨Bajar trabajo¨ del menú superior

Eje Longitudinal = X

Es una línea imaginaria que va desde el morro hasta la cola de un avión; La rotación en torno al eje longitudinal se denomina “balanceo” y se controla con los alerones.

Eje Vertical = Z

Es una línea vertical imaginaria que atraviesa el centro del avión. La rotación en torno al eje vertical se denomina “guiñada” y se controla mediante el timón de dirección.

Eje Lateral ó Transversal = Y

Es una línea imaginaria desde la punta de un ala hasta la otra. El movimiento en torno al eje lateral se denomina “cabeceo” y se controla con el timón de profundidad.

Fuerzas que actúan sobre la aeronave:

Las fuerzas en oposición se equilibran mutuamente en el vuelo estable, que incluye el vuelo en línea recta y nivelado así como el ascenso o el descenso estables a una velocidad constante. Se puede asumir que las cuatro fuerzas actúan en un punto único denominado centro de gravedad (CG).

Peso (W)

Una de las cuatro fuerzas básicas que actúan sobre un avión en vuelo. La sustentación es la fuerza opuesta al peso (más exactamente, la suma de todas las fuerzas hacia abajo) que actúa siempre en dirección al centro de la Tierra, esto es que la redondez de la tierra y el peso de un cuerpo se considera vertical.

En la mayoría de los cálculos, los ingenieros aeronáuticos parten del supuesto de que todo el peso del avión se concentra en un punto denominado centro de gravedad.

En la práctica, se puede entender que el peso actúa sobre una línea situada entre el centro de gravedad del avión y el centro de la tierra.

En principio, se puede pensar que el peso sólo cambia a medida que se consume el combustible. De hecho, a medida que un avión maniobra, experimenta variaciones en el factor de carga o fuerzas G, que cambia la carga que soportan las alas. Por ejemplo, un avión que realiza un viraje de nivel con un ladeo de 60 grados experimenta un factor de carga de 2. Si este avión pesa 2.000 lb (907 Kg) en estado de reposo en tierra, su peso efectivo se convierte en 4.000 lb (1.814 Kg) durante el viraje.

Para conservar el equilibrio entre la sustentación y el peso en las maniobras, debe ajustar el ángulo de ataque. Durante un viraje lateral cerrado, por ejemplo, debe levantar el morro ligeramente (aumentar el ángulo de ataque) para generar mayor sustentación y así equilibrar el aumento de peso.

Levantamiento ó Sustentación (L)

La sustentación es la fuerza que hace volar a un aeroplano. La mayor parte de la sustentación de un aeroplano procede de sus alas. La sustentación que crea un ala se controla mediante el ajuste de la velocidad aerodinámica y el ángulo de ataque (ADA), es decir, el ángulo en que el ala se encuentra con el viento de frente.

En general, a medida que aumenta la velocidad aerodinámica o el ángulo de ataque de un avión, se incrementa la sustentación generada por las alas. A medida que aumenta la velocidad del avión, debe reducir el ángulo de ataque (bajar el morro ligeramente) para mantener una altitud constante. A medida que disminuye la velocidad, debe aumentar el ángulo de ataque (subir el morro ligeramente) para generar mayor sustentación y mantener la altitud.

Recuerde que, incluso en un ascenso o descenso, la sustentación se iguala al peso. El índice de ascenso o descenso de un avión está relacionado principalmente con el empuje generado por sus motores, no por la sustentación generada por las alas

Fórmula para calcular el Levantamiento:

Levantamiento = Viento Relativo x Resultante Total Aerodinámica

Resistencia o Resistencia al Avance (D)

Los aviones se ven afectados por dos tipos de resistencia que son: Parásita e Inducida.

Resistencia Parásita:

La resistencia parásita es la fricción entre el aire y la estructura de un avión como son: tren de aterrizaje, superficie, antenas y demás apéndices.

Es una resistencia al movimiento en el aire, compuesta por la resistencia de forma (debido al tren de aterrizaje, las antenas de radio, la forma de las alas, etc.), por el rozamiento (o fricción) superficial y la interferencia de la corriente de aire entre los componentes del avión como por ejemplo, la unión de las alas con el fuselaje o del fuselaje con la cola.

La resistencia parásita aumenta de manera proporcional al cuadrado de la velocidad del avión.

Si se dobla la velocidad, se cuadruplica la resistencia parásita

Resistencia Inducida:

La resistencia inducida es una consecuencia de la sustentación, que se genera por el desplazamiento del aire desde el área de alta presión situada bajo un ala, hacia el área de baja presión situada sobre ella.

Cuando el aire de alta presión debajo del ala o rotor se arremolina en torno al extremo del área de baja presión situada encima de estos elementos se crean vórtices, que tienen por efecto absorber la energía del avión. Esta energía perdida es la resistencia inducida y se incrementa a medida que disminuye la velocidad aerodinámica.

Este efecto es más pronunciado en velocidades aerodinámicas bajas, donde es necesario un ángulo de ataque alto para generar sustentación suficiente y equilibrar el peso.

La resistencia inducida varía de forma inversamente proporcional al cuadrado de la velocidad.

Si reduce la velocidad aerodinámica a la mitad, la resistencia inducida aumenta cuatro veces.

Tracción o Empuje (T)

El empuje que proporciona el motor de un avión lo impulsa a través del aire. El empuje se opone a la resistencia; en un vuelo estable ambas fuerzas son iguales. Si se aumenta el empuje y se conserva la altitud, el primero supera de forma momentánea la resistencia y el avión acelera. Sin embargo, la resistencia también aumenta y pronto se equilibra con el empuje, el avión deja de acelerar y continúa el vuelo estable con una velocidad aerodinámica superior pero constante.

El empuje también es el factor más importante a la hora de determinar la posibilidad de ascenso del avión. De hecho, la velocidad de ascenso (o ascensional) máxima de un avión no está relacionada con la fuerza de sustentación que generan las alas, sino con la potencia disponible después de la necesaria para mantener el vuelo nivelado.

Fórmula para calcular la tracción:

Tracción = Masa de Aire x Aceleración

¿Por qué no se cae la Torre Pisa?

La torre inclinada de Pisa está en equilibrio estable, porque ha sido construida con materiales muy pesados hasta la ¼ parte y luego más y más livianos yendo hacia arriba. De esta manera se ha bajado considerablemente el centro de gravedad de la torre, y la vertical que arranca de dicho centro cae todavía muy dentro de la base de sustentación delimitada por los cimientos.

Fuerzas y Principios Físicos en la Caída de un Gato

Desde tiempo inmemorial el hombre ha observado la habilidad gatuna, pero sólo en 1894 comenzó a considerarla como un “problema científico”. La Academia de Ciencias de Paris convocó un concurso público para explicar físicamente cómo consigue el gato aterrizar siempre de cuatro patas al caer de una gran altura.

Si se agarra un gato por sus cuatro patas, panza arriba, y se le deja caer, girará en menos de medio segundo alrededor de su propio eje y amortiguará el golpe contra el suelo con las patas estiradas. Da la sensación de que, tras ese giro de 180 grados, no cambiará de postura hasta poner las patas en el suelo.

El animal ha de actuar con rapidez. Al cabo de medio segundo, la velocidad de su centro de gravedad alcanza los 18 Km/h. Mientras que la velocidad de caída sólo crece proporcionalmente con el tiempo; la energía cinética del gato lo hace mucho más de prisa y, con esta, aumenta el peligro de que se lesione en un aterrizaje desgraciado.

A los expertos en mecánica les parecía que el giro se debía al empuje impartido al animal al soltarlo, que así conseguiría un momento angular en uno u otro sentido. El gato, durante su caída, sólo podría girar parte del cuerpo moviendo simultáneamente otra parte en sentido contrario, de suerte que se compensasen los dos momentos angulares. El momento angular total siempre se conserva; si al principio era cero, no podía aparecer de la nada momento alguno. Además para poner simultáneamente las patas traseras y delanteras sobre el suelo, debería girar su cuerpo una vuelta entera, lo que, según lo observado, no era el caso.

Tras algunos experimentos se rechazó esta hipótesis del empuje, así como la hipótesis de que consigue el giro a lo largo de su eje remando vigorosamente la cola.

En el año 1894, Ettienne Jules Marey presentó dos secuencias de imágenes, desde distinta perspectiva de la caída de un gato. A partir de esa figura, Marey supuso que el gato giraba en dos tiempos. En el primero, extendía sus patas traseras perpendicularmente al eje del cuerpo (con lo que aumentaba el momento de inercia de la mitad trasera del cuerpo para el giro axial), mientras que simultáneamente plegaba sus patas delanteras hacia el eje (y reducía el momento de inercia axial de la mitad delantera del cuerpo). Si el gato giraba en un sentido su mitad delantera, su mitad trasera rotaba en sentido opuesto, pero más despacio, en relación inversa a los momentos de inercia.

En un segundo tiempo el felino estiraba las patas delanteras transversalmente y recogía las patas traseras a lo largo, para que la parte trasera girara con mayor ángulo. El resultado final era que las dos mitades habían girado en idéntico sentido aproximadamente la misma diferencia de ángulo.

Equilibrio en el Vuelo de un Búmeran

Toda teoría física que se proponga para explicar el vuelo del búmeran ha de ofrecer respuestas s tres cuestiones claves: ¿Por qué vuelve el búmeran y cuál es el diámetro de la trayectoria de vuelta? ¿Qué proceso frena su vuelo hasta detenerlo? y ¿Por qué siempre acaba en posición horizontal?

Vayamos con la primera. Un búmeran es tanto un planeador como un giróscopo. Sus brazos son alas que experimentan una fuerza en su movimiento hacia delante y giro en el aire. La componente perpendicular al viento marcha se llama fuerza ascensional, aún cuando no esté dirigida hacia arriba. La fuerza ascensional empuja un búmeran lanzado por diestros a una curva hacia la izquierda. Simultáneamente actúa un momento de giro que quiere volcar el búmeran alrededor del eje de su dirección de vuelo; el ala que gira hacia delante experimenta un viento de marcha y una fuerza ascensional correspondientemente mayor que la que va hacia atrás.

A la manera de un giroscopio, elude ese momento de rotación con un giro (precesión) de su plano de vuelo. El búmeran retorna como consecuencia del movimiento en su trayectoria y en su precesión giroscópica. La experiencia enseña que la anchura del vuelo apenas depende de la velocidad de lanzamiento; sí en cambio la velocidad de vuelo y la velocidad angular, con la que el juguete gira durante su vuelo.

Respondamos la segunda cuestión. Planeadores y aviones de papel realizan también un trabajo para vencer la resistencia del aire. Pero unos y otros pueden en su vuelo de descenso convertir la energía potencial de la gravedad en energía cinética y, por lo tanto, planear el declive hasta que terminen en el suelo. En cambio el búmeran pierde parte de su energía cinética en forma de trabajo para vencer la resistencia del aire. Por lo tanto, su vuelo acaba tras un tiempo limitado.

Equilibrio en el Baile

Fuerzas que intervienen:

Línea Media: Es el eje de rotación en el cual se equilibran las fuerzas.

Fuerza de Gravedad: Se ubica en el centro de gravedad, que representa el peso del resto del cuerpo.

Fuerza de Contracción: se ubica en la articulación de la pierna (cóndilo del fémur) con la pelvis, la cual no es vertical.

Fuerza Muscular: Lo realizan los abductores de la cadera; hacen que la cadera se tense.

Peso de la Pierna: Se encuentra en el centro de gravedad de la pierna.

Para que el bailarín gire en su propio eje se necesita que tome un impulso provocado por él mismo, lo que lo hará moverse con cierta velocidad angular.

Equilibrio de una Plataforma Sostenida por una Columna

Como el peso de la zapata y la presión del suelo son colineales, el primero no contribuye al cortante vertical o al momento flexionate. Conviene visualizar la zapata como sometida a una fuerza hacia arriba transmitida por el suelo y a una reacción hacia abajo suministrada por la columna; esto es, desde luego, una inversión de la verdadera forma de la aplicación de la carga. La zapata funciona entonces como una viga en voladizo.

Aquí se aplica el momento de equilibrio en un punto extremo de la zapata, en la cual intervienen la fuerza que aplica la columna a la zapata y la reacción del suelo por acción del peso de ésta.

Curiosidades de la Física

¿Por qué los carreteros para desatascar las ruedas de un carro atan sus caballerías a la parte alta de la rueda?

Para aumentar el valor del par de fuerzas aplicado a la rueda, tomando como brazo el diámetro en vez del radio.

¿Por qué para cerrar o abrir una puerta corrediza que esté algo agarrotada debe tirarse de la parte superior de la misma y no de la manivela?

El agarrotamiento tiene lugar en las ruedas que se deslizan en los carriles que llevan en la parte superior. Si se tira de la manivela, la fuerza aplicada referida al punto de agarrotamiento origina un par que hace girar la puerta un poco hacia arriba, clavándola sobre las guías y dificultando aún más su deslizamiento. Si, por el contrario, se tira de la parte superior, el brazo del par es tan pequeño que prácticamente la fuerza sólo actúa como tal y no como momento, haciendo deslizar la puerta con relativa facilidad.

¿Qué clase de equilibrio presenta una moneda apoyada sobre su canto? Respecto al movimiento de traslación normal a su peso, equilibrio indiferente, ya que por tratarse de un cilindro apoyado sobre su generatriz quedará en equilibrio al cesar aquél; pero debido a su pequeño espesor, su equilibrio es inestable respecto al giro de eje horizontal por el punto de contacto con la mesa; por último, con respecto a avanzar rodando presenta también equilibrio indiferente, ya que quedará en equilibrio por tratarse de un cilindro.

¿Por qué al levantarnos de una silla inclinamos el cuerpo hacia adelante? Para conseguir que la vertical del centro de gravedad pase por los pies, lo que no ocurre cuando estamos sentados.

Un reloj de arena pesa 1 Kg cuando la arena está en el depósito inferior, lo invertimos y lo volvemos a colocar sobre la balanza. ¿Cuánto pesará mientras se derrama la arena? El reloj sigue pesando 1 Kg a pesar de que hay una fracción de la arena en caída libre. El hecho de que el sistema esté provoca al caer la arena una reacción sobre el aire que actúa contra el piso del reloj.

¿Por qué no se caen los motoristas que corren por las paredes casi verticales de esas populares pistas de la muerte en las ferias? Porque su peso se compone con la fuerza centrífuga, dando una resultante tanto más inclinada cuanto mayor es la velocidad de la moto, es decir, cuanto mayor es la fuerza centrífuga. Para evitar el vuelco, la moto ha de inclinarse hasta tomar la dirección de la resultante, perpendicular a la pared.

¿Por qué razón para mantener el equilibrio marchando en bicicleta hay que torcer el manillar hacia el mismo lado que se cae? Porque de este modo se provoca un cambio de dirección de marcha, causa de una fuerza centrífuga, que tiende a colocar de nuevo a la bicicleta en posición vertical. Si el viraje ha sido excesivo, se sobrepasa dicha vertical y entonces se está obligado a mover el manillar en sentido contrario. Esto explica por qué el ciclista novel hace eses constantemente, mientras que cuando se domina la bicicleta se dan los virajes justos para conseguir marchar en línea recta y sin inclinarse.

¿Por qué cuando se sacude una alfombra con un palo el polvo sale despedido, mientras la alfombra apenas se mueve? Porque según el teorema del impulso (producido por el palo) corresponde la misma cantidad de movimiento para la alfombra que para el polvo, pero por la ligereza de éste le corresponde una mayor velocidad, separándose así de la alfombra.

En un platillo hay un balde con agua. En el otro una pesa. La balanza está equilibrada. Ahora Ud. mete un dedo en el agua, sin tocar el balde. La balanza, ¿seguirá en equilibrio?

El platillo del balde bajará. El agua ejerce una fuerza sobre su dedo igual a la densidad del agua multiplicada por el volumen de la parte sumergida del dedo y por la aceleración de la gravedad. Por la tercera ley de Newton, el dedo debe ejercer una fuerza igual y opuesta sobre el agua. Esta fuerza se transmite a la base del balde y de allí al platillo de la balanza, haciéndolo descender.

4.1 Fuerzas en el plano y el espacio

4.2 Equilibrio de una partícula

“Si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, la partícula se encuentra en equilibrio”.

Una partícula sujeta a la acción de dos fuerzas estará en equilibrio si ambas tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos. Entonces la resultante de las fuerzas es cero.

La condición necesaria y suficiente para que una partícula permanezca en equilibrio (en reposo) es que la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella sea cero

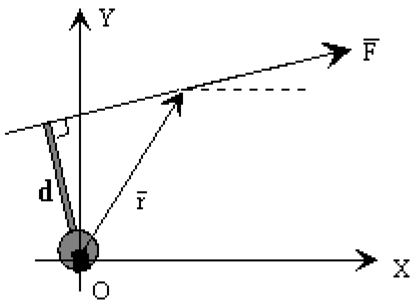
$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{0}$.

Naturalmente con esta condición la partícula podría también moverse con velocidad constante, pero si está inicialmente en reposo la anterior es una condición necesaria y suficiente.

4.3 Momento de una fuerza

Se denomina momento de una fuerza respecto de un punto, al producto vectorial del vector posición **r** de la fuerza por el vector fuerza **F**.

M=**r** x **F**



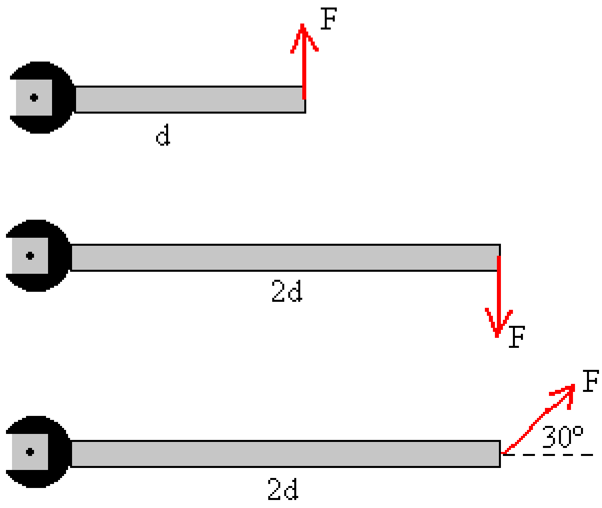
La analogía de la llave y el tornillo, nos ayuda a entender el significado físico de la magnitud momento, y a determinar correctamente el módulo, la dirección y el sentido del momento de una fuerza:

- El módulo es el producto de la fuerza por su brazo (la distancia desde el punto O a la recta de dirección de la fuerza). *M=Fd*
- La dirección perpendicular al plano que contiene la fuerza y el punto, la que marca el eje del tornillo.
- El sentido viene determinado por el avance del tornillo cuando hacemos girar a la llave.

Ejemplo

Supongamos que tenemos tres llaves que actúan sobre tres tornillos en la forma indicada por las figuras. Se aplica una fuerza *F* en el extremo de la llave. Es fácil contestar a las siguientes preguntas:

- ¿En qué situaciones se introduce el tornillo?
- ¿En que situaciones se saca el tornillo?
- ¿Cuáles producen el mismo resultado o son equivalentes?.

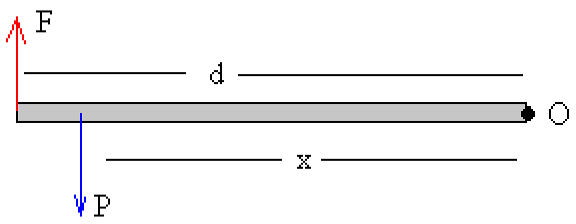


En la primera figura, el tornillo avanza en una dirección perpendicular al plano de la página, y hacia el lector. El módulo del momento es *F·d*.

En la segunda figura, el tornillo avanza en una dirección perpendicular al plano de la página, y hacia dentro (sentido contrario al anterior). El módulo del momento es *F·2d*. Con una llave más larga estamos en una situación más favorable que disponiendo de una llave más corta.

En la tercera figura, el tornillo avanza en una dirección perpendicular al plano de la página, y hacia el lector. El módulo del momento es *F·sen30·2d=F·d*. Esta situación es equivalente a la primera.

- Un momento se considera positivo si el tornillo sale, avanza hacia el lector, la llave gira en sentido contrario a las agujas del reloj.
- Un momento se considera negativo si el tornillo entra, la llave gira en el sentido de las agujas del reloj.

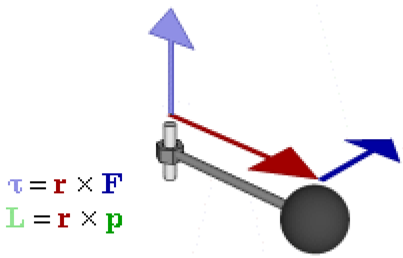


Supongamos una barra de masa despreciable, que está sujeta por su extremo O.

Si colocamos un peso *P* a una distancia *x* del origen. El momento de esta fuerza respecto del origen O es *P·x*.

Para que la barra está en equilibrio la fuerza *F* deberá ser tal que el momento total sea nulo. *-F·d+P·x=0*, de modo que *F=P·x/d.*

Momento de una fuerza



Relación entre los vectores de fuerza, momento de fuerza y vector de posición en un sistema rotatorio

En mecánica newtoniana, se denomina momento de fuerza, torque, torca, o par (o sencillamente momento) [respecto a un punto fijado *B*] a la magnitud que viene dada por el producto vectorial de una fuerza por un vector director (también llamado *radio vector*). Si se denomina *F* a una fuerza, aplicada en un punto *A*, su momento respecto a otro punto *B* viene dado por:

$$\vec{\tau} = r\vec{_{AB}} \times \vec{F}$$

Donde $\vec{r}_{AB}$es el vector director que va desde *B* a *A*. Por la propia definición del producto vectorial, el momento $\vec{\tau}$es un vector perpendicular al plano formado por

$\vec{F}$y $\vec{r}_{AB}$.

Se expresa en unidades de fuerza por unidades de distancia. En el Sistema Internacional de Unidades resulta Newton·metro y se la puede nombrar como *newton-metro* o *newtometro*. Si bien es equivalente al Joule en unidades, no se utiliza esta denominación para medir momentos, ya que el Joule representa trabajo o energía que es un concepto diferente a un momento de fuerza.

El momento de fuerza es equivalente al concepto de *par motor*, es decir, la fuerza que se tiene que hacer para mover un cuerpo respecto a un punto fijo (Ej: un electrón respecto al núcleo) y se condiciona por la masa y la distancia.

4.3.1 Respecto a un punto

Interpretación del momento

El momento de una fuerza con respecto a un punto da a conocer en qué medida existe capacidad en una fuerza o desequilibrio de fuerzas para causar la rotación del cuerpo con respecto a éste.

El momento tiende a provocar un giro en el cuerpo o masa sobre el cual se aplica y es una magnitud característica en elementos que trabajan sometidos a torsión (como los ejes de maquinaria) y en elementos que trabajan sometidos a flexión (como las vigas).

4.3.3 Momento de un par, pares equivalentes. Suma de pares

MOMENTO DE UN PAR. PARES EQUIVALENTES. SUMA DE PARES

Momento de un par

Se dice que dos fuerzas F y –F que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par (figura 4.16). Obviamente, la suma de las componentes de las dos fuerzas en cualquier dirección es igual a cero. Sin embargo, la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a un punto dado no es cero. Aunque las dos fuerzas no originan una traslación del cuerpo sobre el que están actuando, estas si tenderán a hacerlo rotar.

Representando con r A y r B , respectivamente, a los vectores de posición de los puntos de aplicación de F y –F (figura 4.17), se encuentra que la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a O es; r A * F + r B * (-F) = (r A – r B) * F

Definiendo r A – r B = r, donde r es el vector que une los puntos de aplicación de las dos fuerzas, se concluye que la suma de los momentos de F y –F, con respecto a O, esta representada por el vector; M = r * F

El vector M se conoce como el momento del par; se trata de un vector perpendicular al plano que contiene las dos fuerzas y su magnitud esta dada por

$$M = rF \text{ sen } \theta = Fd$$

Donde d es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de F y –F. El sentido de M está definido por la regla de la mano derecha.

Como el vector r en (M= r*F) es independiente de la elección del origen O de los ejes coordenados, se observa que se obtendría el mismo resultado si los momentos de F y –F se hubiera calculado con respecto a un punto O`. Por lo tanto, el momento M de un par es un vector libre, que puede ser aplicado en cualquier punto.

A partir de la definición del momento de un par también se concluye que dos pares, uno constituido por las fuerzas F 1 y –F 1 y el otro constituido por las fuerzas F 2 y –F 2 (figura 4.19) tendrá momentos iguales sí; F 1 d 1 = F 2 d 2

Y si los dos pares se encuentran en planos paralelos (o en el mismo plano) y tienen el mismo sentido

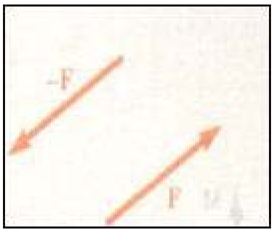


Figura 4.16

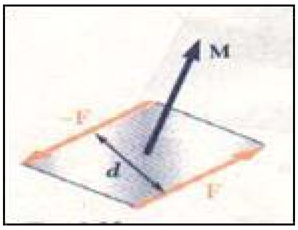


Figura 4.17

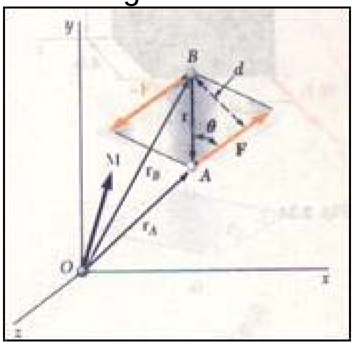


Figura 4.18

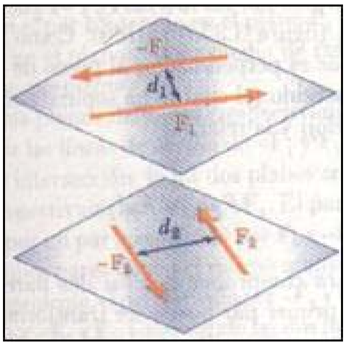


Figura 4.19

Suma de pares

Considérese dos planos P 1 y P 2 que se intersectan y dos pares que actúan, respectivamente en P 1 y P 2 . Se puede suponer, sin perder la generalidad que el par en P 1 consta de dos fuerzas F 1 y –F 1 perpendiculares a la línea de intercepción de los dos planos y que actúan, respectivamente, en A y B (figura 4.22ª). Similarmente, se supone que el par en P 2 consta de dos fuerzas F 2 y –F 2 perpendicular a AB y que actúan, respectivamente, en A y B.

Es obvio que la resultante R de F 1 y F 2 y la resultante –R de –F 1 y –F 2 forman un par. Representando por r al vector que une a B con A y recordando la definición de par, el momento M del par resultante queda expresado como sigue:

M= r * R = r * (F 1 + F 2)

Y por el teorema de Varignon; M= r * F 1 + r * F 2

Pero el primer término en la expresión obtenida representa al momento M 1 del par en P 1 y el segundo término representa al momento M 2 del par en P 2 . Así se tiene

M= M 1 + M 2

Y se concluye que la suma de dos pares cuyos momentos son iguales a M 1 y M 2 es un par de momento M igual a la suma vectorial de M 1 y M 2 (figura 4.22b)

Pares equivalentes

La figura (4.20) muestra tres pares que actúan sucesivamente sobre la misma caja rectangular. Como se vio en la sección anterior, el único movimiento que un par le puede impartir a un cuerpo rígido es una rotación. Como cada uno de los tres pares mostrados tienen el mismo momento M (la misma dirección y la misma magnitud M= 120 lb * in) se puede esperar que los tres pares tengan el mismo efecto sobre la caja.

Por más razonable que parezca esta conclusión, no debe aceptarse de inmediato. Aunque la intuición es una gran ayuda en el estudio de la mecánica, no debe ser aceptada como un sustituto del razonamiento lógico. Antes de establecer que dos sistemas (o grupos) de fuerzas tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido, este hecho debe demostrase con base en la evidencia experimental que se ha presentado hasta este momento. Esta evidencia consiste en la ley del paralelogramo para la suma de dos fuerzas y en el principio de transmisibilidad. Por lo tanto, se establecerá que dos sistemas de fuerzas son equivalentes (esto es, que dichos sistemas tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido) si se puede transformar a uno de ellos en el otro por medio de una o varias de las siguientes operación: 1) reemplazar dos fuerzas que actúan sobre la misma partícula por su resultante, 2) descomponer a una fuerza en dos componentes, 3) cancelar dos fuerzas iguales y opuestas que actúan sobre la misma partícula, 4) unir a la misma partícula dos fuerzas iguales y opuestas y 5) mover una fuerza a lo largo de la línea de acción. Cada una de estas operaciones se justifica fácilmente con base en la ley del paralelogramo o en el principio de transmisibilidad.

Ahora se procede a demostrar que dos pares que tienen el mismo momento M son equivalentes. Primero se considera dos pares contenidos en el mismo plano y se supone que dicho plano coincide con el plano de la figura (figura 4.21). El primer par esta constituido por las fuerzas F 1 y –F 1 de magnitud F 1 , las cuales están localizadas a una distancia d 1 entre si (figura

4.21ª) y el segundo par esta constituido por las fuerzas F_2 y $-F_2$ de magnitud F_2, localizadas a una distancia d_2 (figura 4.21d) entre si. Como los dos pares tienen el mismo momento M, que es perpendicular al plano de la figura, ambos pares deben tener el mismo sentido (el +cual se ha supuesto contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y la relación

$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$

Debe ser satisfecha. Para comprobar que los pares son equivalentes, se debe demostrar que el primer par puede ser transformado en el segundo por medio de las operaciones enumeradas en el párrafo anterior.

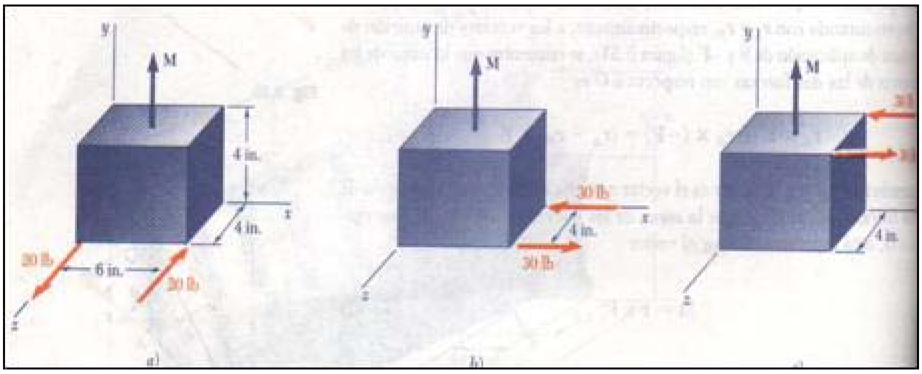


Figura 4.20

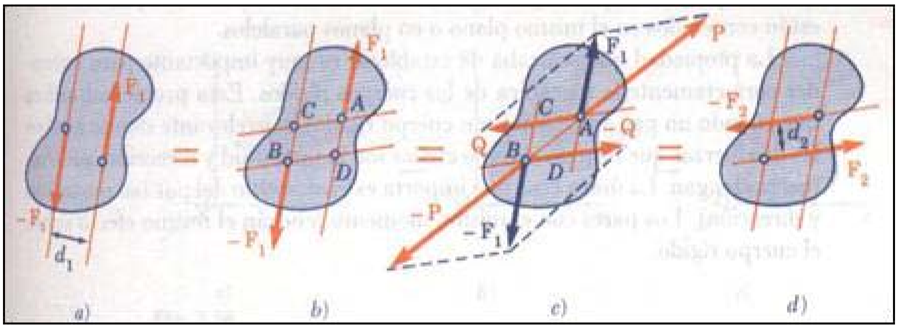


Figura 4.21

Suma de pares

Considérese dos planos P_1 y P_2 que se intersectan y dos pares que actúan, respectivamente en P_1 y P_2. Se puede suponer, sin perder la generalidad que el par en P_1 consta de dos fuerzas F_1 y $-F_1$ perpendiculares a la línea de intercepción de los dos planos y que actúan, respectivamente, en A y B (figura 4.22ª). Similarmente, se supone que el par en P_2 consta de dos fuerzas F_2 y $-F_2$ perpendicular a AB y que actúan, respectivamente, en A y B. Es obvio que la resultante R de F_1 y F_2 y la resultante $-R$ de $-F_1$ y $-F_2$ forman un par. Representando por r al vector que une a B con A y recordando la definición de par, el momento M del par resultante queda expresado como sigue:

$$M = r * R = r * (F_1 + F_2)$$

Y por el teorema de Varignon; $M = r * F_1 + r * F_2$

Pero el primer término en la expresión obtenida representa al momento M_1 del par en P_1 y el segundo término representa al momento M_2 del par en P_2. Así se tiene

$M = M_1 + M_2$

Y se concluye que la suma de dos pares cuyos momentos son iguales a M_1 y M_2 es un par de momento M igual a la suma vectorial de M_1 y M_2 (figura 4.22b)

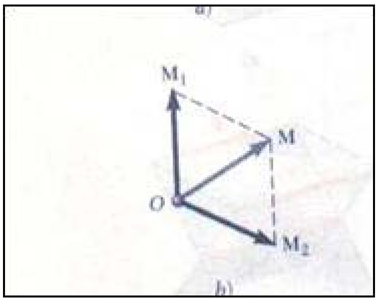


Figura 4.22 a

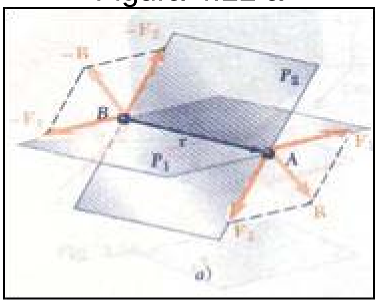
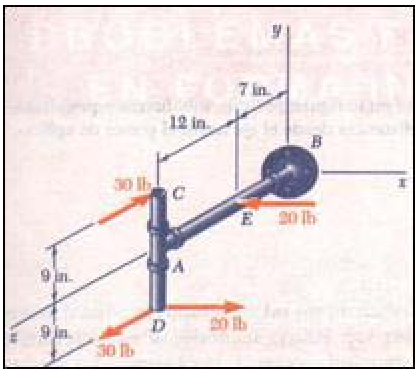


Figura 4.22 b

Problema resuelto 4.6

Determine las componentes del par único que es equivalente a los dos mostrados.



Solución:

Los cálculos se simplificaran si se fijan en A dos fuerzas de 20 lb iguales y opuestas. Esto permitirá remplazar al par original de las fuerzas de 20 lb por dos nuevos pares originados por fuerzas de 20 lb , uno de los cuales se encuentra en el plano zx; el otro se encuentra en un plano paralelo al plano xy. Los tres pares mostrados en el croquis adjunto pueden ser representados por tres vectores de par M x , M y , y M z , dirigidos a lo largo de los ejes coordenados. Los momentos correspondientes son

M x = - (30 lb)(18 in) = - 540 lb*in

M y = + (20 lb)(12 in) = + 240 lb*in

M z = + (20 lb)(9 in) = + 180 lb*in

Estos tres momentos representan las componentes del par único M, equivalente a los pares dados. Así, se escribe

M = - (540 lb*in)i + (240 lb*in)j + (180 lb*in)k

Solución alternativa. Las componentes del par equivalente único M también pueden ser determinadas calculando la suma de los momentos de las cuatro fuerzas dadas con respecto a un punto arbitrario. Eligiendo al punto D, se escribe

M = M D = (18 in)j * (-30 lb)k + [(9 in)j – (12 in)k] * (-20 lb)i

y, después de calcular los diversos productos cruz, se tiene

M = - (540 lb*in)i + (240 lb*in)j + (180 lb*in)k

4.4 Reacciones en apoyos y conexiones

REACCIONES EN LOS PUNTOS DE APOYO Y CONEXIONES DE UNA ESTRUCTURA BIDIMENCIONAL

Las reacciones ejercidas sobre una fuerza bidimensional pueden ser divididas en tres grupos que corresponden a tres tipos diferentes de apoyo o conexiones.

1. reacciones equivalentes a una fuerza cuya línea de acción es conocida. Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen rodillos, balancines, superficies sin fricción, eslabones y ranuras lisas. Cada uno de estos apoyos pueden impedir el movimiento solo en una dirección. Cada una de estas acciones involucran a una sola incógnita, es decir la magnitud de la reacción; dicha magnitud debe de representarse por una letra apropiada. La línea de la acción y la reacción es conocida y debe indicarse claramente en el diagrama del cuerpo rígido. La reacción puede ser dirigida a uno u otro sentido en el caso de rodillos de doble carril, eslabones, collarines, etc. Generalmente se supone que los rodillos de un carril y los balancines son irreversibles y, por lo tanto, las reacciones correspondientes también pueden estar dirigidas en uno u otro sentido. 2. reacciones equivalentes a una fuerza de la magnitud y dirección desconocidas. Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen pernos sin fricción en orificios ajustados, articulaciones o bisagras y superficies rugosas. Estos pueden impedir la traslación del cuerpo rígido en todas las direcciones, pero no pueden impedir la rotación del mismo con respecto a la conexión. Las reacciones de este grupo involucran dos incógnitas que usualmente se representan por ser componentes x y y. en este caso de superficie rugosa, la componente perpendicular a la superficie debe dirigirse alejándose de esta. 3. reacciones equivalentes a una fuerza y un par. Estas reacciones se originan por apoyos fijos los culpes se oponen a cualquier movimiento del cuerpo libre, y, por lo tanto, lo restringen completamente. Los soportes fijos producen fuerzas sobre toda la superficie del contacto; sin embargo, estas fuerzas forman un sistema que se puede reducir a una fuerza y un par. Las reacciones de este grupo involucran tres incógnitas, las cuales consisten en las dos componentes de la fuerza y en el momento par

4.5 Equilibrio de cuerpos rígidos

Cuando un cuerpo está sometido a un sistema de fuerzas, tal que el torsor equivalente es nulo, esto es, que la resultante de todas las fuerzas y el momento resultante sean cero, entonces el cuerpo está en equilibrio. Esto, físicamente, significa que el cuerpo, a menos que esté en movimiento uniforme rectilíneo, no se trasladará ni podrá rotar bajo la acción de ese sistema de fuerzas.

Por ahora centraremos la atención en un solo cuerpo, posteriormente se estudiaran sistemas de varios cuerpos interconectados.

Las posibilidades de movimiento que tiene un cuerpo o los grados de libertad, son seis: tres de traslación, en las direcciones x, y, z y tres de rotación, alrededor de los mismos ejes. Como en general, los cuerpos que son objeto de estudio en ingeniería están unidos, soportados, en contacto con otros, las posibilidades de movimiento en translación y rotación son menores, esto es, disminuyen los grados de libertad. Es, entonces, importante conocer qué tipo de restricción ofrecen los apoyos, uniones o contactos que tiene el cuerpo objeto del análisis. Las restricciones a que es sometido un cuerpo, se manifiestan físicamente por fuerzas o pares (momentos) que impiden la translación o la rotación respectivamente y se les conoce como reacciones.

El estudio del equilibrio de un cuerpo rígido consiste básicamente en conocer todas las fuerzas, incluidos los pares que actúan sobre él para mantener ese estado.

Por ahora se analizarán las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo, es decir las fuerzas que otros cuerpos, unidos o en contacto con él, le ejercen. Estas fuerzas son las fuerzas aplicadas por contacto, el peso y las reacciones de los apoyos. Las fuerzas aplicadas y el peso en general son conocidos, entonces el estudio del equilibrio consiste básicamente en la determinación de las reacciones. También puede ser objeto de estudio las condiciones geométricas que se requieren para mantener en equilibrio el cuerpo.

Para determinar las reacciones que se ejercen sobre un cuerpo es importante entender las restricciones que otros cuerpos le imponen al movimiento. La cuestión es fácil, si un cuerpo restringe la traslación en una dirección, por ejemplo en x, éste ejercerá una fuerza en esta dirección; si impide la rotación alrededor de un eje, ejercerá un par en la dirección de ese eje.

Las reacciones ejercidas por diferentes apoyos o uniones se presentan en el cuadro al final de la sección, tanto para situaciones tridimensionales como para casos en dos dimensiones.

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = 0 \qquad [1\text{-}17]$$

$$\sum \vec{\mathbf{M}}_0 = 0 \qquad [1\text{-}18]$$

Descomponiendo los vectores en sus componentes rectangulares se obtiene:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0 \qquad [1\text{-}19]$$

$$\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0 \qquad [1\text{-}20]$$

Estas ecuaciones independientes son las disponibles para resolver problemas de Si por ejemplo el plano en equilibrio de cuerpos en tres dimensiones. En problemas bidimensionales las ecuaciones se reducen a tres, número que corresponde a los grados de libertad de un movimiento plano; dos de translación y uno de rotación.

que actúan las fuerzas es el plano xy, las ecuaciones de equilibrio son:

$$\sum Fx = 0, \quad \sum Fy = 0, \quad \sum Mz = 0$$

De acuerdo a lo anterior, el máximo numero de incógnitas que puede tener un problema para poder solucionarlo completamente, es de seis para situaciones en tres dimensiones y de tres para dos dimensiones.

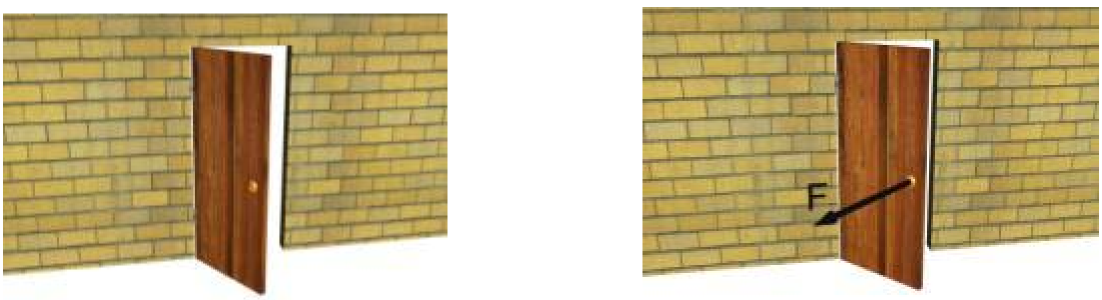
Cuando en un problema hay tantas incógnitas como ecuaciones disponibles y se pueden hallar todas, se dice que el problema es estáticamente determinado. Si existen mas incógnitas que ecuaciones, el problema es insoluble en su totalidad por los métodos de la estática y el problema es estáticamente indeterminado.

De otra parte, hay situaciones en las que, a pesar de tener un número de incógnitas igual al de ecuaciones disponibles no se pueden solucionar. Estas situaciones se presentan por un arreglo especial de los apoyos, haciendo que el sistema no esté completamente restringido para un sistema general de fuerzas.

Tal sistema es entonces estáticamente indeterminado y parcial o impropiamente restringido. Un cuerpo parcialmente restringido puede estar en equilibrio para un sistema particular de carga, pero dejará de estarlo para un sistema general de carga.

Por ejemplo una puerta apoyada en sus bisagras, estará en equilibrio mientras no se aplique una carga horizontal, [Fig. 1-30].

Si en un sistema hay menos incógnitas que ecuaciones disponibles, éste es parcialmente restringido, es decir, no podrá estar en equilibrio para un sistema general de fuerzas.



Equilibrio **No Equilibrio**

Figura 4.5-1

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA PARA LA MATERIA DE FISICA 1

1. Resnick Robert, Halliday David, Krane Kenneth S. Física I, Editorial C.E.C.S.A.

2. Fishbane, Gariorowickz, Thornton, Física para ciencias e ingeniería, Editorial Prentice Hall.

3. Beer Ferdinad, Johnston Russel. Mecánica vectorial para ingenieros. Editorial Mc Graw Hil. 6a Edición.

4. Serway, Raymond A. Física, Vol. I. Editorial Mc Graw Hil.

5. Hibbeler R. C. Ingenieria mecanica. Editorial C.E.C.S.A. 4a Edición.

6. Meriam J. L. Mecánica para ingenieros, Editorial Reverte.

7. Sandor B. J. Ingeniería mecánica, Editorial Reverte.

8. Bedfor A., Fowler W. Mecánica para ingeniería, Editorial Addison Wesley.

9. http//jersey.uoregon.edu/vlab/